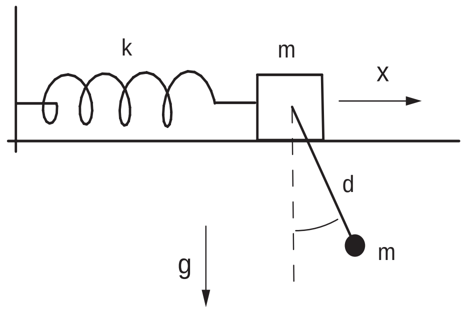
FYS 3120/4120 Classical Mechanics and Electromagnetism

Tillegg til oppgavesamling
Våren 2004



OPPGAVE 1
Fjær og kloss.

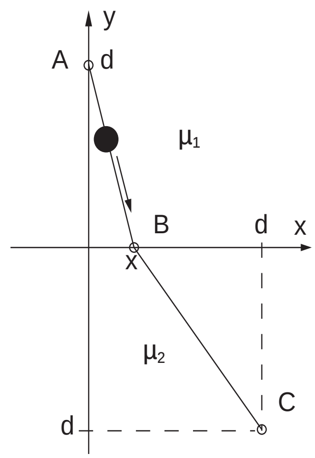
Et sammensatt system er vist på figuren. En kloss med masse m er festet til en fjær med fjærstivhet k. Den kan bevege seg friksjonsløst på et horisontalt bord. Til klossen er festet en pendel som kan bevege seg fritt under påvirkning av tyngden. Pendelkula har samme masse m som klossen og lengden av pendelstanga er d. Fjæra og pendelstanga regnes som masseløse. Koordinaten x for forskyvningen i klossen og koordinaten θ for pendelutslaget er valgt slik at $x = 0$ og $\theta = 0$ ved likevekt.

a) Finn systemets Lagrangefunksjon.

b) Sett opp Lagranges ligninger for variablene x og θ og finn bevegelsesligningene for systemet.

c) Finn uttrykkene for de generaliserte impulser p_x og $p_{\theta)}$ som svarer til variablene x og θ. Finn hastighetene $\dot{x}$ og $\dot{\theta}$ uttrykt ved de generaliserte impulser og koordinater.

d) Bestem Hamiltonfunksjonen til systemet. Sett opp Hamiltons ligninger og vis at de gir bevegelsesligninger som er konsistent med bevegelsesligningene funnet fra Lagranges ligninger.



OPPGAVE 2
Et variasjonsproblem

Et legeme plasseres på et horisontalt bord, som er koordinatisert med (x, y). Glidefriksjons-koeffisienten varierer med posisjonen på bordet, $\mu = \mu(x, y)$.

Anta at legemet skal flyttes mellom to punkter A med posisjon $\vec{r}_0$ og B med posisjon $\vec{r}_1$. Legemet skal forflyttes langs den banen hvor energitapet p.g.a. friksjon er minst mulig.

a) Vis hvordan dette kan formuleres som et variasjonsproblem for friksjonsarbeidet utført ved forskyvningen.

Vi antar nå at variasjonen i μ er slik at den har en konstant verdi μ_1 i øvre halvplan ($y > 0$) og en annen konstant verdi i nedre halvplan μ_2. Vi antar at μ_2 er halvparten så stor som μ_1. Koordinatene til A er $(0, d)$ og koordinatene til B er $(d, -d)$ hvor d er en oppgitt lengde.

b) Forklar hvorfor den banen vi søker er sammensatt av en rett linje i øvre halvplan og en annen rett linje i nedre halvplan. Vis hvordan variasjonsproblemet reduseres til problemet å bestemme det punkt (den x-verdi) hvor de to linjene møtes.

c) Vis at bestemmelsen av denne x-verdi forutsetter løsningen av en fjerdegradsligning. Løs problemet grafisk ved å plotte fjerdegradspolynomet som funksjon av x.