# FYS307 - V03

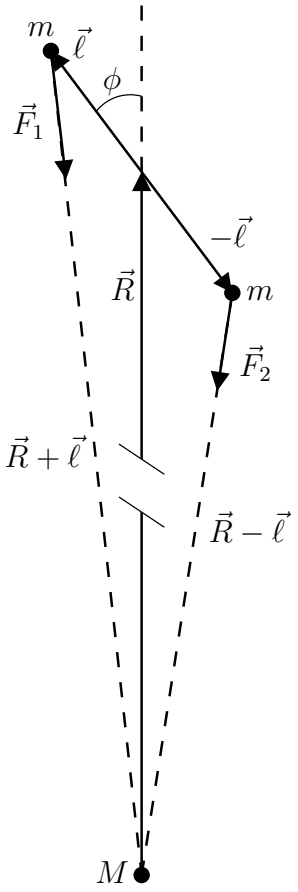
# OPPGAVEARK A

## Oppgave A1: Tidekraftpendel

a) Utled uttrykket for perioden til en matematisk pendel med lengde $\ell$ i et område der tyngdens akselerasjon er $g$. Hva er perioden til en matematisk pendel med lengde 0,25 m ved jordas overflate?

b) En tidekraftpendel består av to like, massive punkter forbundet med en stiv, masseløs stang. Stangen har lengde $2\ell$. Pendelen kan svinge om stangens midtpunkt, som tenkes fiksert i konstant avstand $R$ fra jordas massesenter. Svingningene foregår i et fast (ikke-roterende) vertikalplan. Jorda betraktes som en sfærisk symmetrisk massefordeling. Kreftene på massepunktene er skissert i fig. A.1.

Pendelen har to likevektsposisjoner, hvilke? Undersøk stabilitetsegenskapene til likevektsposisjonene. Bruk spinnligningen og utled et utrykk for perioden til stangens svingebevegelse om den stabile likevektsposisjonen. Finn perioden ved jordas overflate. Har man en lignende svingebevegelse i et homogent gravitasjonsfelt?




Figur A.1: Tidekraftpendel

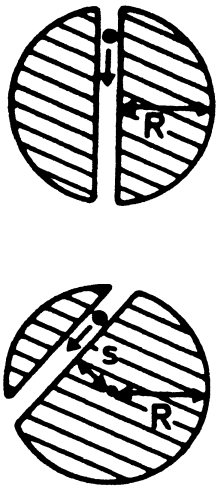
Oppgave A2: Potensialproblemer

a) Beregn gravitasjonspotensialet $\phi(r)$ for et kuleformet masseskall. Tykkelsen av skallet kan neglisjeres og masse pr. flateenhet, $\sigma$, regnes å være den samme overalt på kuleflaten. Finn potensialet både for $r > R$ og $r < R$, $R$ betegner radius til kuleskallet.

b) La $R$ være jordradius og $M$ jordmassen. Beregn gravitasjonspotensialet $\phi(r)$ for $r < R$ og $r > R$. Massetettheten kan regnes å være konstant for $r < R$. Beregn hva tyngdeakselerasjonen er på jordoverflaten. Sammenlign med den vanlige oppgitte verdi $g = 9,81 m/s^2$.

c) Vi tenker oss at et hult rør bores gjennom sentrum i jorda. (Se bort fra praktiske problemer!) En kule slippes fra jordoverflaten ned i røret. Finn posisjonen til kula som funksjon av tiden. Hva er perioden til de svingninger kula utfører?

d) Anta at røret ikke går gjennom jordas sentrum, men har en minsteavstand fra dette punkt som betegnes med $s$. Undersøk hvordan perioden til svingningene varierer med $s$ for en kule som sklir friksjonsløst (dvs. uten å rotere) frem og tilbake i røret.




Figur A.2: Et hult rør bores gjennom sentrum i jorda.

## Oppgave A3: Jord-månesystemet

a) Sett opp bevegelsesligningen for jorda og månen. (Regn dem som punktmasser, gravitasjonskrefter fra andre himmellegemer neglisjeres). Vis at en mulig løsning av ligningene beskriver en bevegelse hvor jorda og månen går i sirkel om det felles massesenter. Beregn ut fra kjennskap til jord- og månemassen og månens omløpstid, hva radius er i de sirklene som jorda og månen beskriver. (Sammenlign radius i jordas sirkelbevegelse med jordradien).

b) Beregn gravitasjonspotensialet langs forbindelseslinjen mellom jorda og månen, og fremstill resultatet i et diagram. I hvilken avstand fra jorda er tyngdekraften fra jorda og månen like sterke?

c) Månen trekker med forskjellig kraft på et kilogramlodd ved jordoverflaten som befinner seg på den siden av jorda som vender mot månen, og på et som befinner seg på motsatt side. Finn denne forskjellen.

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK B

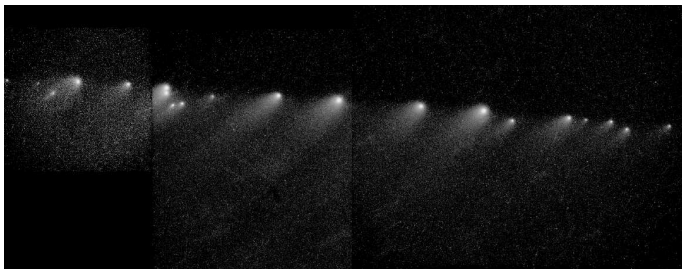
## Oppgave B1: Roche-grensen

a) En sfærisk måne med masse $m$ og radius $R$ går i bane rundt en planet med masse $M$. Vis at hvis månen kommer nærmere planetens senter enn

$$r_l = \left(\frac{2M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} R$$

vil steiner på månens overflate bli hevet p.g.a. tidekreftene.

Avstanden $r_l$ kalles Roches grense. En måne som kommer nærmere planeten enn denne grensen, vil ødelegges av tidekreftene.



Figur B.1: Kometen Shoemaker-Levy 9 fotografert av Hubble-teleskopet i mars 1994.

b) Kometen Shoemaker-Levy 9, som kolliderte med Jupiter i juli 1994, hadde allerede før kollisjonen blitt revet i biter etter å ha passert nær Jupiter i 1992. Gitt at kometen hadde en masse på $m = 2,0 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg}$, og nærmeste passering var 96000 km fra Jupiters sentrum i 1992, estimér størrelsen på kometen før den ble revet opp. Massen til Jupiter er $M = 1,9 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$

## Oppgave B2: Tvilling-paradokset

Nyttårsdag 1994 forlater en astronaut (A) jorda i et romskip med hastighet $v = 0,8c$ og reiser til den nærmeste stjerne, $\alpha$-Centauri. Denne befinner seg i en avstand på 4 lysår målt i jordas referansesystem. Idet han når stjernen gjør han straks vendereis og når tilbake til jorda nyttårsdag 2004 (jordtid).

Astronauten har en bror (B) som er igjen på jorda, og de er enige om å sende hverandre en hilsen pr. radiotelefon hver nyttårsdag til de igjen treffes.

a) Påvis at A bare sender 6 hilsener (det som sendes den siste reisedagen medregnet), mens B sender 10.

b) Tegn et Minkowski-diagram hvor A's reise er tegnet inn i jordas referansesystem. Tegn også inn alle signalene som B sender. Påvis ved hjelp av diagrammet at A bare mottar én hilsen under reisen til $\alpha$-Centauri, mens han mottar 9 på tilbakereisen.

c) Tegn et nytt diagram, fortsatt i jordas referansesystem og med A's reise inntegnet. Men tegn denne gang inn signalene som A sender til B. Påvis ut fra diagrammet at B mottar én hilsen hvert 3. år de første 9 årene etter brorens avreise, mens han mottar 3 hilsener det siste året av brorens reise.

d) Vis hvordan de resultater som er nevnt under punkt b) og c) kan utledes fra Doppler-effekten.

## Oppgave B3: 4-vektorer

a) Gitt tre 4-vektorer

$$\begin{aligned} \vec{A} &= 4\vec{e}_t + 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z, \\ \vec{B} &= 5\vec{e}_t + 4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y, \\ \vec{C} &= \vec{e}_t + 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z, \end{aligned} \tag{B.1}$$

hvor

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1, \tag{B.2}$$

mens

$$\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t = -1 \tag{B.3}$$

Vis at $\vec{A}$ er tid-lik ($\vec{A} \cdot \vec{A} < 0$), $\vec{B}$ er lys-lik ($\vec{B} \cdot \vec{B} = 0$) og $\vec{C}$ er rom-lik ($\vec{C} \cdot \vec{C} > 0$).

b) Anta at $\vec{A}$ og $\vec{B}$ er to ortogonale 4-vektorer, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. Påvis følgende:

Når $\vec{A}$ er tid-lik må $\vec{B}$ være rom-lik. Når $\vec{A}$ er lys-lik så kan $\vec{B}$ enten være lys-lik eller rom-lik. Hvis $\vec{A}$ og $\vec{B}$ er lys-like, så må de være proporsjonale. Når $\vec{A}$ er rom-lik så kan $\vec{B}$ være tid-lik, lys-lik eller rom-lik. Illustrer med vektorer i et tre-dimensjonalt Minkowski-diagram.

c) Et skifte av basisvektorer er gitt ved

$$\begin{aligned} \vec{e}_{t'} &= \cosh\alpha \vec{e}_t + \sinh\alpha \vec{e}_x, \\ \vec{e}_{x'} &= \sinh\alpha \vec{e}_t + \cosh\alpha \vec{e}_x, \\ \vec{e}_{y'} &= \vec{e}_y, \\ \vec{e}_{z'} &= \vec{e}_z. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Vis at dette beskriver en Lorentz-transformasjon langs $x$-aksen, hvor den relative hastighet $v$ mellom referansesystemene er gitt ved $v = \tanh\alpha$. Tegn vektorene inn i et to-dimensjonalt Minkowski-diagram og vis hva slags kurver $\vec{e}_{t'}$ og $\vec{e}_{x'}$ beskriver når $\alpha$ endres.

d) 3-vektoren $\vec{v}$ som beskriver hastigheten til en partikkel, er definert *relativt* til en observatør. Forklar hvorfor 4-hastigheten $\vec{u}$ er definert *uavhengig* av noen observatør. (Foreta et skille mellom vektoren $\vec{u}$ selv og dens komponenter $u^\mu$).

4-impulsen til en partikkel med hvilemasse $m$ er definert som $\vec{p} = m\vec{u} = md\vec{x}/d\tau$, hvor $\tau$ er partikkelens egentid. Vis at $\vec{p}$ er en tid-lik vektor som oppfyller $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$. Tegn inn i et to-dimensjonalt Minkowski-diagram den kurve $\vec{p}$ må ligge på, og forklar hvordan denne endres når $m \to 0$.

Anta at energien til partikkelen måles av en observatør med 4-hastighet $\vec{u}$. Vis at energien han måler er gitt ved uttrykket

$$E = -\vec{p} \cdot \vec{u}. \tag{B.5}$$

Dette er et nyttig uttrykk for å beregne partikkelens energi i et vilkårlig referansesystem.

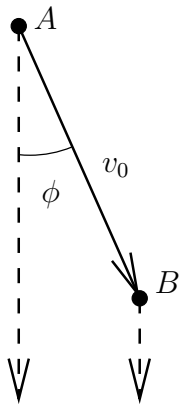
Oppgave B4: Overlyshastighet?

Kvasaren 3C273 (som befinner seg i punktet $A$ på figur B.2) skyter ut en del som beveger seg med romlig hastighet $v_0$ mot oss i en vinkel $\phi$ med synslinjen.

a) Anta at ved samtidighet sendes to signaler til jorda, et fra $A$ og et fra $B$. Hvor mye tidligere vil signalet fra $B$ nå jorda, enn det fra $A$?

b) Finn et uttrykk for den transverselle avstanden den utskutte delen har beveget seg når den ankommer $B$. Hvor lang tid (relativt til jorda) har den utskutte delen brukt?

c) Kall den transverselle hastigheten for $v$ og relater den til $v_0$. Den observerte (transverselle) hastigheten for lyskilden er $v = 10c$. Anta $\phi = 10$, og finn $v_0$. Hva er den største verdien $\phi$ kan ha?




Figur B.2: Kvasaren 3C273

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK C

## Oppgave C1:

a) Vis at følgende gjelder:

$$\underline{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha) = A^\alpha \underline{p}(\vec{e}_\alpha) \tag{C.1}$$

b) La komponentene til $\underline{p}$, $\vec{A}$ og $\vec{B}$ være henholdsvis $(-1, 1, 2, 0)$, $(2, 1, 0, -1)$ og $(0, 2, 0, 0)$. Finn (i) $\underline{p}(\vec{A})$; (ii) $\underline{p}(\vec{B})$; (iii) $\underline{p}(\vec{A} - 3\vec{B})$; (iv) $\underline{p}(\vec{A}) - 3\underline{p}(\vec{B})$.

## Oppgave C2:

a) Gitt to 1-former $\underline{p}$ og $\underline{q}$. Vi lar komponentene til $\underline{p}$ være $(1, 1, 0, 0)$ og de til $\underline{q}$ er $(-1, 0, 1, 0)$. Vis, ved å benytte to vektorer $\vec{A}$ og $\vec{B}$ som argumenter, at $\underline{p} \otimes \underline{q} \neq \underline{q} \otimes \underline{p}$. Deretter, finn komponentene til $\underline{p} \otimes \underline{q}$.

b) Finn komponentene til den symmetriske og den antisymmetriske delen av $\underline{p} \otimes \underline{q}$ som ble definert i C2 a).

## Oppgave C3:

a) Anta at $h$ er en $\binom{0}{2}$ tensor med egenskapene at, for to vilkårlige vektorer $\vec{A}$ og $\vec{B}$, så har vi

$$h(\,\cdot\,, \vec{A}) = \alpha h(\,\cdot\,, \vec{B}), \tag{C.2}$$

hvor $\alpha$ er et tall som avhenger av $\vec{A}$ og $\vec{B}$. Vis at det eksisterer 1-former $\underline{p}$ og $\underline{q}$ slik at

$$h = \underline{p} \otimes \underline{q} \tag{C.3}$$

b) Anta at $T$ er en $\binom{1}{1}$ tensor, $\underline{\omega}$ er en 1-form, $\vec{v}$ en vektor, og $T(\underline{\omega}; \vec{v})$ er verdien av $T$ på $\underline{\omega}$ og $\vec{v}$. Vis at $T(\,\cdot\,; \vec{v})$ er en vektor og $T(\underline{\omega};\,\cdot\,)$ er en 1-form, d.v.s. at en $\binom{1}{1}$ tensor avbilder vektorer til vektorer og 1-former til 1-former.

Oppgave C4:

a) La komponentene til en tensor $M^{\alpha\beta}$ være gitt ved matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

Finn (la den metriske tensoren ha komponenter $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$):

1. komponentene til den symmetriske tensoren $M^{(\alpha\beta)}$ og den antisymmetriske tensoren $M^{[\alpha\beta]}$;
2. komponentene til $M^{\alpha}{}_{\beta}$;
3. komponentene til $M_{\alpha}{}^{\beta}$;
4. komponentene til $M_{\alpha\beta}$.

b) For tensoren med komponenter $M^{\alpha}{}_{\beta}$, går det an å snakke om de symmetriske og de antisymmetriske delene? Hvis ja, definer dem. Hvis nei, forklar hvorfor?

Oppgave C5:

Anta at $A$ er en antisymmetrisk $\binom{2}{0}$ tensor, $B$ en symmetrisk $\binom{0}{2}$ tensor, $C$ en vilkårlig $\binom{0}{2}$ tensor, og $D$ en vilkårlig $\binom{2}{0}$ tensor. Vis

a) $A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = 0$;

b) $A^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}C_{[\alpha\beta]}$;

c) $B_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}D^{(\alpha\beta)}$.

Oppgave C6:

Gitt følgende former i et 4-dimensjonalt tidrom:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} &= \alpha_\mu \underline{\omega}^\mu \\ \underline{\beta} &= \beta_{\mu\nu} \underline{\omega}^\mu \wedge \underline{\omega}^\nu \\ \underline{\gamma} &= \gamma_\mu \underline{\omega}^\mu \\ \underline{\delta} &= \delta_{\mu\nu} \underline{\omega}^\mu \wedge \underline{\omega}^\nu \end{aligned} \tag{C.5}$$

Hvilken relasjon er det mellom

$$\begin{aligned} &\underline{\alpha} \wedge \underline{\beta} \quad \text{og} \quad \underline{\beta} \wedge \underline{\alpha} \quad , \\ &\underline{\alpha} \wedge \underline{\gamma} \quad \text{og} \quad \underline{\gamma} \wedge \underline{\alpha} \quad , \\ &\underline{\beta} \wedge \underline{\delta} \quad \text{og} \quad \underline{\delta} \wedge \underline{\beta} \quad ? \end{aligned} \tag{C.6}$$

Oppgave C7: Koordinattransformasjoner i to dimensjoner

Vi studerer i denne oppgaven vektoren $\vec{x}$ i det to-dimensjonale Euklidiske plan $E^2$. $\{\vec{e}_m; m = x, y\}$ er et ortonormalt basissett i dette planet, dvs.

$$\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = \delta_{mn} \tag{C.7}$$

Komponentene til en vektor $\vec{x}$ i denne basis betegnes ved $x$ og $y$, eller $x^m$, $m = x, y$:

$$\vec{x} = x^m \vec{e}_m = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \tag{C.8}$$

Et annet skjevvinklet basissett betegnes med $\{\vec{e}_\mu; \mu = 1, 2\}$. Vektoren $\vec{x}$ er, uttrykt ved disse basisvektorene,

$$\vec{x} = x^\mu \vec{e}_\mu = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 \tag{C.9}$$

Sammenhengen mellom de to basissett er gitt ved ligningene

$$\begin{aligned} x^1 &= 2x - y \\ x^2 &= x + y \end{aligned} \tag{C.10}$$

a) Finn $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$ uttrykt ved $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$. Bestem transformasjonsmatrisen $M$, definert ved

$$x^m = M^m{}_\mu x^\mu \tag{C.11}$$

Hva er den inverse matrise $\bar{M}$ til $M$?

b) Den metriske tensor $g$ er gitt ved ligningen

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{mn} dx^m dx^n \tag{C.12}$$

der $ds$ betegner avstanden mellom to punkter $\vec{x}$ og $\vec{x} + d\vec{x}$ i planet. Påvis ut fra denne likningen at vi har

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu} \tag{C.13}$$

Hvordan kan matrisene $(g_{\mu\nu})$ og $(g_{mn})$ forbindes ved hjelp av transformasjonsmatrisen $M$. Finn de eksplisitte utrykk for de to matrisene.

Skalarproduktet mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ kan altså utrykkes som

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu \\ &= g_{mn} u^m v^n \end{aligned} \tag{C.14}$$

Vis ved utregning for $\vec{u} = 2\vec{e}_1$ og $\vec{v} = 3\vec{e}_2$ at de to uttrykkene på høyre side i ligningen virkelig gir samme resultat for $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

c) Med utgangspunkt i basisvektorene $\vec{e}_\mu$ kan et nytt basissett $\vec{\omega}^\mu$ defineres ved ligningen

$$\vec{\omega}^\mu \cdot \vec{e}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \tag{C.15}$$

Finn $\vec{\omega}^1$ og $\vec{\omega}^2$ uttrykt ved $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$. Hvorfor er $\vec{\omega}^m = \vec{e}_m$ mens $\vec{\omega}^\mu \neq \vec{e}_\mu$?

En vektor $\vec{x}$ kan nå utrykkes som

$$\vec{x} = x^\mu \vec{e}_\mu = x_\mu \vec{\omega}^\mu \tag{C.16}$$

Hvilken forbindelse er det mellom kontravariante komponentene $x^\mu$ til vektoren $\vec{x}$ og de kovariante komponentene $x_\mu$? Bestem begge sett med komponenter for vektoren $\vec{a} = 3\vec{e}_x + \vec{e}_y$.

Tegn inn i et $(x, y)$-diagram de tre sett med basisvektorer $\{\vec{e}_m\}$, $\{\vec{e}_\mu\}$ og $\{\vec{\omega}^\mu\}$. Hvilken geometrisk sammenheng er det mellom de to settene med vektorer $\{\vec{e}_\mu\}$ og $\{\vec{\omega}^\mu\}$? Tegn også inn vektoren $\vec{a}$ og beskriv hvordan komponentene med hensyn til de tre basissett kan leses ut av diagrammet.

d) Finn matrisen $(g^{\mu\nu})$ definert ved

$$\vec{\omega}^\mu \cdot \vec{\omega}^\nu = g^{\mu\nu} \tag{C.17}$$

Påvis at den er invers til matrisen $(g_{\mu\nu})$.

Den metriske tensor er en symmetrisk tensor av rang 2, og kan derfor uttrykkes ved basisvektorene $\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$ i tensor-produkt-rommet $E^2 \otimes E^2$,

$$g = g^{mn}\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \tag{C.18}$$

Vis at den også kan uttrykkes på følgende to måter:

$$\begin{aligned} g &= g_{\mu\nu}\vec{\omega}^\mu \otimes \vec{\omega}^\nu \\ g &= g^{\mu\nu}\vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu \end{aligned}$$

Hvilken dimensjon har rommet som basisvektoren $\vec{e}_m \otimes \vec{e}_n$ utspenner?

De antisymmetriske tensorene danner et én dimensjonalt underrom. Påvis dette ved å vise at en antisymmetrisk tensor $A_{mn}$ kan uttrykkes ved den ene basisvektoren

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_x \otimes \vec{e}_y - \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x \tag{C.19}$$

Finn $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ($\vec{u}$ og $\vec{v}$ er oppgitt under punkt b)) uttrykt ved basisvektoren $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$. Hvilken sammenheng er det mellom dette uttrykket og arealet som vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ utspenner? Bestem også hakeproduktet $\vec{\omega}^1 \wedge \vec{\omega}^2$.

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK D

## Oppgave D1: Duale former

La $\{\vec{e}_n\}$ være en kartesisk basis i det 3-dimensjonale Euklidske rom. Fra en vektor $\vec{A} = A^n\vec{e}_n$ kan vi danne former på følgende to måter:

1) Ved å konstruere en 1-form fra de kovariante komponentene $A_m = g_{mn}A^n$

$$\underline{A} = A_m\underline{\omega}^m \tag{D.1}$$

2) Ved å danne en *2-form* ut fra de *duale* komponentene, som er definert ved $\alpha_{ij} = \epsilon_{ijk}A^k$,

$$\underline{\alpha} = \frac{1}{2!}\alpha_{ij}\underline{\omega}^i \wedge \underline{\omega}^j \tag{D.2}$$

Vi skriver denne formen ofte som $\underline{\alpha} = *\underline{A}$, hvor $*$-opersjonen betyr å ta de duale komponentene.

På samme måte kan vi fra en 1-form $\underline{\sigma} = \sigma_n\underline{\omega}^n$ konstruere en 2-form via de kontravariante komponentene $\sigma^m = g^{mn}\sigma_n$:

$$\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\sigma^k \tag{D.3}$$

$$\underline{\theta} = \frac{1}{2!}\theta_{ij}\underline{\omega}^i \wedge \underline{\omega}^j \tag{D.4}$$

Denne formen skrives ofte som $\underline{\theta} = *\underline{\sigma}$, hvor $*$-operasjonen også her betyr å ta de duale av de kontravariante komponentene.

a) Gitt vektorene $\vec{A} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z$ og $\vec{B} = 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + \vec{e}_z$. Finn de tilsvarende 1-formene $\underline{A}$ og $\underline{B}$ og de duale 2-formene $\underline{\alpha} = *\underline{A}$ og $\underline{\beta} = *\underline{B}$. Finn også den duale form $\underline{\theta}$ til 1-formen $\underline{\sigma} = \underline{\omega}^x - 2\underline{\omega}^y$.

b) Ta ytreproduktet mellom formene $\underline{A}$ og $\underline{B}$ og vis at vi har følgende sammenheng mellom 2-formene $\underline{\theta} = \underline{A} \wedge \underline{B}$ og vektoren $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$:

$$\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}C^k \tag{D.5}$$

Vis at ytreproduktet $\underline{A} \wedge *\underline{B}$ er gitt ved 3-formen

$$\underline{A} \wedge *\underline{B} = (\vec{A} \cdot \vec{B})\underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^z \tag{D.6}$$

c) $\vec{A}(\vec{x})$ betegner nå et vektorfelt. Vis at komponentene til den ytrederiverte av $\underline{A}(\vec{x})$ er gitt ved komponentene til $\nabla \times \vec{A}$. Vis også at 2-formen $\underline{\alpha} = *\underline{A}$ er forbundet med $\nabla \cdot \vec{A}$ ved ligningen

$$\underline{d} * \underline{A} = (\nabla \cdot \vec{A})\underline{\omega}^x \wedge \underline{\omega}^y \wedge \underline{\omega}^z \tag{D.7}$$

Vi har altså følgende korrespondanser

$$\underline{dA} \sim \nabla \times \vec{A} \tag{D.8}$$
$$\underline{d} * \underline{A} \sim \nabla \cdot \vec{A} \tag{D.9}$$

Vis at for et skalarfelt $f$ har vi følgende korrespondanser

$$\underline{df} \sim \nabla f \tag{D.10}$$
$$\underline{d} * \underline{df} \sim \nabla^2 f \tag{D.11}$$

### Oppgave D2: Relativistisk roterende skive

En skive roterer i sitt eget plan med konstant vinkelhastighet $\omega$ om en fast akse $A$. Aksen velges som origo i et ikke-roterende kartesisk koordinatsystem $(x, y)$. ($z$-koordinaten neglisjerer vi i det følgende.) Bevegelsen til et gitt punkt på skiven kan da uttrykkes ved

$$x = r\cos(\omega t + \phi) \tag{D.12}$$
$$y = r\sin(\omega t + \phi) \tag{D.13}$$

hvor $(r, \phi)$ er koordinater som angir punktet på skiven.

a) En observatør som kan bevege seg omkring på skiven, utfører avstandsmålinger mellom nabopunkter på forskjellige steder. Disse utføres mens han er i ro i forhold til skiven på stedet. Resultatet antar vi er det samme som målt i et inertialsystem med samme hastighet som observatøren i det øyeblikk målingen utføres. Lengdene han måler kan uttrykkes ved en ligning

$$d\ell^2 = f_1(r, \phi)dr^2 + f_2(r, \phi)d\phi^2 \tag{D.14}$$

Finn $f_1(r, \phi)$ og $f_2(r, \phi)$.

Vi antar nå at han måler avstanden fra aksen $A$ ut til et punkt $(R, 0)$ langs linjen $\phi = 0$, ved å legge sammen resultatet fra målinger mellom nabopunkter. Hva blir resultatet?

Han måler videre avstanden rundt skiven langs sirkelen $r = R$. Hva finner han? På hvilken måte kan man av resultatet komme frem til at metrikken han kartlegger er ikke-Euklidsk? Vil skiven for observatøren fortone seg som en positivt eller negativt krummet flate?

b) Vi innfører koordinatene $(\tilde{x}, \tilde{y})$ som ligger fast i forhold til skiven, og er gitt ved

$$\tilde{x} = r\cos\phi, \tag{D.15}$$

$$\tilde{y} = r\sin\phi \tag{D.16}$$

Finn det invariante interval $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$ uttrykt ved koordinatene $(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$. Sett opp den relativistiske Lagrange-funksjon for en fri partikkel og finn bevegelsesligningene uttrykt i de samme koordinatene. Vis at ligningene går over i den ikke-relativistiske form, med et Coriolis ledd og et sentrifugalledd når vi antar at $\omega r \ll 1$ og at partikkelhastigheten $v \ll 1$.

c) Lyssignaler blir sendt ut fra aksen $A$. Hva slags baner vil lyssignalene beskrive i $(\tilde{x}, \tilde{y})$-koordinatsystemet? Tegn figur. Et lyssignal som sendes ut med frekvens $\nu_0$ blir mottatt av observatøren i punktet $r = R$, $\phi = 0$. Hvilken frekvens $\nu$ vil han måle?

d) Rundt skiven $r = R$ tenker vi oss at det ligger tett med klokker som er i ro i forhold til skiven på stedet. Klokkene er standardklokker, dvs. de måler klokkens egentid. Vi ønsker nå å synkronisere klokkene og tar utgangspunkt i en klokke i punktet $(R, 0)$. De synkroniseres så i retning med økende $\phi$ på følgende måte: Når klokkene i punktet $\phi$ er stilt så stilles klokken i nabopunktet $\phi + d\phi$ slik at de viser samme tid ved samtidighet i de to klokkenes momentane hvilesystem.

Vis at det oppstår problemer med synkroniseringen når denne prosessen er gjennomført rundt hele sirkelen, ved at den klokken vi tok utgangspunkt i, ikke går synkront med naboklokken som er stilt ifølge synkroniseringsprosessen. Finn tidsdifferensen som er oppstått mellom disse to klokkene.

e) Lokalt omkring et punkt $(r, \phi, t)$ kan vi definere et inertialsystem som er et momentant hvilesystem for punktet $(r, \phi)$ på skiven. I dette referansesystem innføres et ortonormalt sett av basisvektorer $\vec{e}_{\hat{\lambda}}$, $\vec{e}_{\hat{\eta}}$ og $\vec{e}_{\hat{\xi}}$. Vektoren $\vec{e}_{\hat{\lambda}}$ peker langs systemets tidsakse, $\vec{e}_{\hat{\xi}}$ i radiell retning og $e_{\hat{\eta}}$ i tangentiell retning på skiven. Finn vektorene uttrykt ved $\vec{e}_t$, $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.

Banen til et lyssignal utsendt fra $A$ studeres i de lokale inertialsystem langs banen. Finn ut hvordan den romlige retning til lyssignalet forandrer seg rela-

tivt til basisvektorene $\vec{e}_{\hat{\xi}}$ og $\vec{e}_{\hat{\eta}}$ utover langs banene. Er resultatet i overrensstemmelse med det som tidligere er funnet ut om lysbanen i $(\tilde{x}, \tilde{y})$-koordinatsystemet?

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK E

## Oppgave E1: Fri partikkel i hyperbolsk koordinatsystem

Metrikken i et todimensjonalt rom er gitt ved

$$ds^2 = dV^2 - V^2 dU^2 \tag{E.1}$$

a) Finn Lagrange-ligningene for banene til en fri partikkel i denne metrikken. Vis at disse har løsningene

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{V_0}\cosh(U - U_0) \tag{E.2}$$

når partikkelen starter ved et tidspunkt $U_0$ fra en begynnelsesposisjon $V_0$ og med null begynnelseshastighet.

b) Vis at dette er rette linjer i koordinatsystemet $(t, x)$ definert ved

$$x = V\cosh U \tag{E.3}$$
$$t = V\sinh U \tag{E.4}$$

Finn partikkelens hastighet $v$ uttrykt ved $U_0$ og dens $x$-koordinat for $t = 0$ uttrykt ved $U_0$ og $V_0$. Finn intervallet $ds^2$ uttrykt ved koordinatene $x$ og $t$ og påvis at rommet som partikkelen beveger seg i er et Minkowski-rom med én rom- og én tidskoordinat.

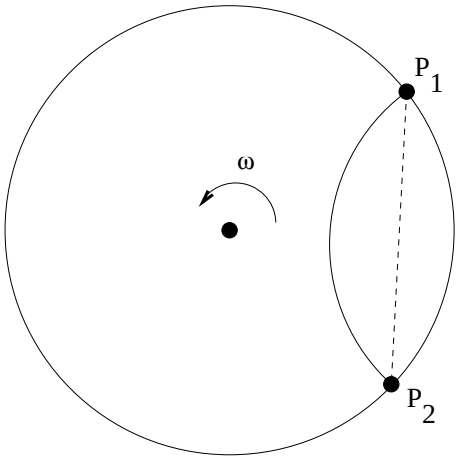
c) Uttrykk den kovariante impulskomponenten $p_U$ ved $p_t = -E$ og $p_x = p$ og vis at den er en bevegelseskonstant. Hvordan ser man dette direkte i metrikken? Vis at den kontravariante komponenten $p^U$ ikke er noen bevegelseskonstant. Er $p_V$ eller $p^V$ bevegelseskonstanter?

## Oppgave E2: Romlig geodet i roterende referansesystem

Vi betrakter rommet med linjeelement

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}} d\theta^2 \tag{E.5}$$

Vi vil finne den korteste kurven mellom to punkter $P_1$ og $P_2$ med avstand $r$ fra sentrum (se fig. E.1). Vi velger tangentvektorer med lengde 1, og med komponenter $\dot{x}^i = (\dot{r}, \dot{\theta})$.




Figur E.1: Geodetiske kurver på en ikke-roterende og roterende skive.

a) Skriv opp betingelsen for at tangentvektorene har lengde 1.

b) Sett opp Lagrangefunksjonen til kurven

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}_i\dot{x}^i \tag{E.6}$$

c) Hvilken koordinat er syklisk? Sett opp et uttrykk for den konjugerte impulsen til denne koordinaten.

d) Finn et uttrykk for $\dot{\theta}$ og $\dot{r}$ som funksjon av $r$, og finn differensiallikningen for kurven (Hint: Finn $dr/d\theta = \dot{r}/\dot{\theta}$ som funksjon av $r$).

e) Bruk randbetingelen $\dot{r} = 0$ for $r = r_0$, $\theta = 0$ og vis at

$$\frac{p_\theta}{r_0} = \sqrt{1 + \frac{p_\theta^2\omega^2}{c^2}} \tag{E.7}$$

f) Vis at differensiallikningen kan skrives som

$$\frac{dr}{r\sqrt{r^2 - r_0^2}} - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{rdr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = \frac{d\theta}{r_0} \tag{E.8}$$

Integrér differensiallikningen og finn likningen for kurven. Plott kurven.

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK F

## Oppgave F1: Differensialoperatorer i sfæriske koordinater

Sfæriske koordinater i et 3-dimensjonalt Euklidsk rom er gitt ved transformasjonene

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

a) Regn ut den metriske tensor i sfæriske koordinater ved å bruke uttrykket

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{F.1}$$

Hvordan kan vi se av resultatet at de sfæriske koordinatene er ortogonale?

b) Komponentene til $\nabla f$ er pr. definisjon lik komponentene til vektoren som formen $\underline{d}f$ kan dannes fra. Finn uttrykket for $\nabla f$ i sfæriske koordinater.

c) Benytt sammenhengen (se oppgave D1) $\nabla \times \vec{A} \sim \underline{\underline{dA}}$ til å finne $\nabla \times \vec{A}$ i sfæriske koordinater.

d) Gjenta prosedyren fra b) og c) for

$$\nabla \cdot \vec{A} \sim \underline{d} * \underline{A} \tag{F.2}$$

og

$$\nabla^2 f \sim \underline{d} * \underline{d} f. \tag{F.3}$$

Kontroller uttrykkene i b), c) og d) ved å sammenlikne med dem man finner i Rottmanns formelsamling (Hint: dekomponer uttrykkene i ortonormal basis.)

## Oppgave F2: Poincarés lemma

a) Benytt Poincarés lemma $\underline{d}^2\underline{\alpha} = 0$ for det tilfelle at $\underline{\alpha}$ er en 0-form, dvs. en skalar funksjon $f(x, y, z)$ og vis at det tilsvarer vektoridentiteten $\nabla \times \nabla f = 0$.

b) For det tilfelle at $\underline{A}$ er en 1-form med tilhørende vektor $\vec{A}$, vis at Poincarés lemma $\underline{d}^2\underline{A} = 0$ tilsvarer vektoridentiteten $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$.

## Oppgave F3: Parabolske koordinater

Sammenhengen mellom de kartesiske koordinatene $(x, y)$ i planet og de *parabolske koordinatene* $(\xi, \eta)$ er gitt ved likningene

$$x = \xi\eta \tag{F.4}$$

$$y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \tag{F.5}$$

a) Bestem basisvektorene $\vec{e}_\xi$ og $\vec{e}_\eta$ samt den metriske tensoren $g_{\xi\eta}$ i det parabolske koordinatsystemet. Tegn koordinatene for $\xi$ og $\eta$ inn i $(x, y)$-planet. Tegn også inn $\vec{e}_\xi$ og $\vec{e}_\eta$ (med riktig lengde) i noen punkter.

b) Bestem Christoffelsymbolene $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$.

Finn en basistransformasjon til en ortonormal basis $\{\vec{e}_{\hat{\xi}}, \vec{e}_{\hat{\eta}}\}$ slik at $\vec{e}_{\hat{\xi}}$ er parallell med $\vec{e}_\xi$ og $\vec{e}_{\hat{\eta}}$ er parallell med $\vec{e}_\eta$.

Hva er sammenhengen mellom formene $\underline{\omega}^{\hat{\xi}}, \underline{\omega}^{\hat{\eta}}$ og $\underline{\omega}^{\xi}, \underline{\omega}^{\eta}$?

Finn $\underline{\omega}^{\xi}$ og $\underline{\omega}^{\eta}$ uttrykt ved $\underline{\omega}^{x}$ og $\underline{\omega}^{y}$.

c) Finn komponentene i den ortonormale basisen $(A^{\hat{\xi}}, A^{\hat{\eta}})$ til en vektor $\vec{A}$ uttrykt ved de kartesiske komponentene $A^x$ og $A^y$.

La $\underline{A}$ være den tilsvarende 1-formen, $\underline{A} = A_x\underline{\omega}^x + A_y\underline{\omega}^y = A_{\hat{\xi}}\underline{\omega}^{\hat{\xi}} + A_{\hat{\eta}}\underline{\omega}^{\hat{\eta}}$. Hvilken sammenheng er det mellom $(A^{\hat{\xi}}, A^{\hat{\eta}})$ og $(A_{\hat{\xi}}, A_{\hat{\eta}})$?

Hvordan en sammenhengen mellom den ytrederiverte til $\underline{A}$ og $\nabla \times \vec{A}$ (Se oppgave D1)? Benytt sammenhengen til å finne $\nabla \times \vec{A}$ i parabolske koordinater uttrykt ved $A^{\hat{\xi}}$ og $A^{\hat{\eta}}$.

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK G

## Oppgave G1: Uniformt akselerert referansesystem

Vi studerer i denne oppgaven et krumlinjet koordinatsystem $(U, V)$ i det todimensjonale Minkowski-rom. Sammenhengen med det rettlinjede koordinatsystemet $(t, x)$ er gitt ved

$$t = V \sinh(aU), \tag{G.1}$$
$$x = V \cosh(aU), \tag{G.2}$$

der $a$ er en konstant. (Sml. oppgave E1.)

a) Tegn koordinatlinjene for $U$ og $V$ inn i et $(t, x)$-diagram. Beregn basisvektorene $\vec{e}_U$ og $\vec{e}_V$ og tegn dem inn i noen punkter i diagrammet. Finn metrikken $ds^2 = dx^2 - dt^2$ uttrykt ved $U$ og $V$.

b) Vi antar nå at en partikkel har en bane i tidrommet som faller sammen med én av kurvene $V$ = konstant. En slik bevegelse kalles en hyperbolsk bevegelse, hvorfor?

Vis at partikkelen har konstant akselerasjon $g$ langs banen, når akselerasjonen måles i partikkelens momentane hvilesystem. Finn denne akselerasjonen. Finn også partikkelens hastighet og akselerasjon i det stasjonære systemet $(t, x)$.

c) Vis at i ethvert punkt på partikkelbanen vil retningen på $(U, V)$-koordinataksene falle sammen med tids- og romaksen for partikkelens instantane hvilesystem. Hvordan ser vi av uttrykket for linjeelementet at $V$-koordinaten måler lengden langs romaksen, mens $U$-koordinaten, som betegnes som koordinattiden, generelt ikke gir partikkelens egentid? For hvilken verdi på $V$ faller koordinattiden og egentiden sammen?

En kan se på $(U, V)$-koordinatsystemet som et forsøk på å binde de instantane hvilesystemene langs banen sammen til et koordinatsystem som dekker hele tidrommet. Forklar hvorfor dette ikke lar seg gjennomføre overalt, idet det oppstår en singularitet i koordinatsystemet i en viss avstand fra partikkelbanen.

d) En stav beveger seg i sin egen lengderetning. Ved tidspunktet $t = 0$ er staven i ro, men den er akselerert. Lengden av staven målt i det stasjonære systemet er ved dette tidspunktet $L$. Staven beveger seg slik at det forreste punktet har konstant akselerasjon målt i det momentane hvilesystemet.

Vi forutsetter at akselerasjonen av staven foregår slik at den infinitesimale avstanden $d\ell$ mellom nabopunkter på staven, målt i det momentane hvilesystemet er konstant. (Ingen strekning eller sammentrykning i det lokale hvilesystemet.) Finn bevegelsen til det bakerste punktet på staven i det stasjonære referansesystemet. Hvorfor kan staven ikke ha større lengde enn en maksimumslengde $L_{\max}$?

Hvis det bakerste punktet på staven har konstant akselerasjon, men staven ellers akselereres som tidligere, er det da noen maksimalverdi på $L$?

e) Et romskip forlater jorda ved tiden $t = 0$ og beveger seg med konstant akselerasjon $g$, lik jordens tyngdeakselerasjon, utover i verdensrommet. Finn ut hvor langt romskipet har beveget seg i løpet av 10 år i romskipets egentid.

Fra jorda sendes det radiosignaler til romskipet. Påvis at radiosignaler som sendes etter et tidspunkt $T$ ikke vil nå romskipet til tross for at signalene beveger seg med lyshastigheten. Finn $T$. Ved hvilket tidspunkt er radiosignalene blitt sendt fra jorda, når de mottas ombord på romskipet 10 år etter avreisen (romskipets egentid)?

Beregn frekvensen til radiosignalene som mottas i romskipet, uttrykt ved frekvensen $\nu_0$ som de er sendt ut med, og tidspunktet $t_0$ når de ble sendt fra jorda, og undersøk hvordan den forandres når $t_0 \to T$.

### Oppgave G2: Kovariant derivert

a) Anta at $A^{\mu\nu}{}_{\lambda}$ transformerer som en tensor. Vis at $A^{\mu\nu}{}_{\nu}$ vil transformere som en vektor, mens $A^{\mu\mu}{}_{\nu}$ ikke vil gjøre det. (Summasjon over gjentatte indekser.)

b) Vis ut fra uttrykket

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu}\right) \tag{G.3}$$

at $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ ikke er noen tensor.

c) Anta at $A^\mu(x)$ er et vektorfelt. Vis at $A^\mu{}_{,\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}$ ikke transformerer som en tensor, mens den kovariant deriverte,

$$A^\mu{}_{;\nu} = A^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} A^\alpha, \tag{G.4}$$

gjør det.

d) Vis at

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \tag{G.5}$$

e) Påvis at kovariant derivasjon virker på følgende måte:

$$(A^\mu B_\nu)_{;\lambda} = A^\mu{}_{;\lambda} B_\nu + A^\mu B_{\nu;\lambda}. \tag{G.6}$$

f) Vis at den kovariante divergens kan uttrykkes ved

$$\nabla \cdot \vec{A} \equiv A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left( \sqrt{|g|} A^\mu \right), \tag{G.7}$$

hvor $g$ er determinanten til den metriske tensoren, $g = \det(g_{\mu\nu})$. (Hint: Bruk at $\partial_\alpha g \equiv g_{,\alpha} = g\, g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha}$.)

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK H

## Oppgave H1: Parallellforskyvning

a) En kurve $P(\lambda)$ går gjennom et punkt $P = P(0)$. I dette punktet er det definert en vektor $\vec{A}$. Denne vektoren parallellforskyves langs kurven, slik at vi i hvert punkt $P(\lambda)$ får definert en vektor $\vec{A}(\lambda)$. Uttrykk betingelsen om parallellitet av vektorene langs kurven som en likning for vektorens komponenter $A^\mu(\lambda)$. Vis at ved en infinitesimal forskyvning $dx^\mu$ er forandringen i vektorens komponenter gitt ved

$$dA^\mu = -\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(x) A^\lambda dx^\nu. \tag{H.1}$$

b) En lukket kurve har form av et infinitesimalt parallellogram med sider $d\vec{a}$ og $d\vec{b}$. Hjørnene på parallellogrammet betegnes i fortløpende rekkefølge med $A$, $B$, $C$ og $D$. En vektor $\vec{A}$ parallellforskyves fra $A$ og $C$ langs de to kurvene $ABC$ og $ADC$. Vis at resultatet i de to tilfellene generelt ikke er det samme. Benytt dette til å påvise at forandringen av $\vec{A}$ ved å parallellforskyve vektoren langs den lukkede kurven $ABCDA$ er

$$\delta A^\alpha = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} A^\beta da^\gamma db^\delta, \tag{H.2}$$

hvor $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ er Riemanns krumningstensor.

## Oppgave H2: Geodetisk avvik

En geodetisk kurve $x^\mu(s)$ er parametrisert med veilengden $s$ som parameter ($ds^2 = dx^\mu dx_\mu$). I nærheten av denne kurven ligger en annen geodetisk kurve $x'^\mu(s) = x^\mu(s) + n^\mu(s)$, hvor $n^\mu$ er en liten størrelse. Tangentvektorene $t^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ og $t'^\mu = \frac{dx'^\mu}{ds}$ for de to kurvene avviker også lite fra hverandre, $t'^\mu = t^\mu + \Delta t^\mu$, $\Delta t^\mu \ll 1$.

Vi studerer et lite utsnitt av de kurvene, for parameterverdier mellom $s$ og $s + \Delta s$, som vist på figuren neste side. Ved å parallellforskyve vektorer langs sidene i det tilnærmete parallellogram $AA'B'B$, skal vi beregne størrelsen $\frac{d^2\vec{n}}{ds^2}$. For enkelhets skyld innfører vi symbolet $P_{BA}$ for parallellforskyvning langs

linjestykket $BA$, altså slik at $\vec{v}_B = P_{BA}\vec{v}_A$ er den vektoren som fremkommer ved å parallellforskyve vektoren $\vec{v}_A$ fra $A$ til $B$. Tilsvarende symboler benyttes for de andre linjestykkene. I tillegg indiserer vi vektorene med det punkt hvor vektoren er definert. (Eks. $\vec{t}_A$ er tangentvektoren i punkt $A$.)

Vi innfører størrelsen $\vec{\tau} = \frac{d\vec{n}}{ds}$. Vis at denne vektoren kan uttrykkes som

$$\vec{\tau}_A = P_{AA'}\vec{t}_{A'} - \vec{t}_A \tag{H.3}$$

(tilsvarende uttrykk gjelder i punkt $B$). Vis videre at den kovariante deriverte av denne vektoren kan uttrykkes ved ligningen

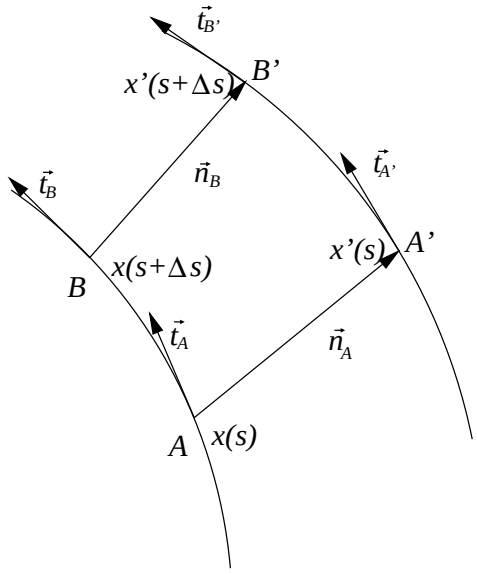
$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}\Delta s = P_{AB}\vec{\tau}_B - \vec{\tau}_A \tag{H.4}$$

(til første orden i $\Delta s$).

Benytt de to ligningene ovenfor til å finne et uttrykk for $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ som involverer parallellforskyvning av tangentvektoren $\vec{t}_A$ rundt den lukkede kurven $ABB'A'A$). Vis ut fra dette at $\vec{n}(s)$, som gir avviket mellom de to geodetiske kurvene, oppfyller ligningen

$$\frac{d^2\vec{n}}{ds^2} + \vec{e}_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} t^\beta n^\gamma t^\delta = 0 \tag{H.5}$$

Skriv denne ligningen også på komponentform.



# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK I

## Oppgave I1: Et krumlinjet koordinatsystem i to dimensjoner

Metrikken på en todimensjonal flate er i koordinatene $u$ og $v$ oppgitt som

$$ds^2 = v^2 du^2 + u^2 dv^2. \tag{I.1}$$

Vi skal vise på to forskjellige måter at dette beskriver metrikken til det flate, todimensjonale Euklidske plan.

a) Utnytt sammenhengen

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu}, \tag{I.2}$$

ved å ta den ytre deriverte, til å bestemme konneksjonsformene $\underline{\Omega}^\mu{}_\nu$. Beregn krumningsformene $\underline{R}^\mu{}_\nu$ og vis at de er identisk lik null.

b) Vis at metrikken kan bringes over på formen

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{I.3}$$

ved å finne en transformasjonsmatrise $M^m{}_\mu$ som gir sammenhengen mellom basisvektorene $\vec{e}_u$ og $\vec{e}_v$ og kartesiske basisvektorer $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$.

Dette kan gjøres ved å ta utgangspunkt i følgende to sett likninger:

$$g_{\mu\nu} = g_{mn} M^m{}_\mu M^n{}_\nu, \tag{I.4}$$

$$\frac{\partial M^m{}_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial M^m{}_\nu}{\partial x^\mu}. \tag{I.5}$$

(Forklar hvor disse likningene skriver seg fra.)

## Oppgave I2: Krumningstensoren til en kuleflate

Innfør et ortonormalt basisfelt på en kuleflate, og bruk Cartan's strukturlikninger til å finne de fysiske komponentene til Riemanns krumningstensor på kuleflaten.

Oppgave I3: Krumningsskalaren til et samtidighetsplan

På en roterende skive så er det romlige linjeelementet gitt ved

$$d\ell^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} d\phi^2 \tag{I.6}$$

Innfør et ortonormalt basisfelt på denne flaten og beregn Ricci's krumningsskalar ved å bruke Cartan's strukturlikninger.

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK J

## Oppgave J1: Projeksjonstensoren

La den metriske tensoren for tidrommet i et koordinatsystem $K$ ha komponenter $g_{\mu\nu}$. En observatør har 4-hastighet $\vec{u}$.

En vilkårlig vektor $\vec{a}$ kan dekomponeres i en komponent $\vec{a}_\parallel$ parallelt med $\vec{u}$ og en komponent $\vec{a}_\perp$ ortogonalt på $\vec{u}$, slik at $\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$.

a) Vis at vi skrive:

$$\vec{a}_\parallel = (\vec{a}\cdot\vec{u})\vec{u}/u^2 = -(\vec{a}\cdot\vec{u})\vec{u}, \tag{J.1}$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{u})\vec{u} \tag{J.2}$$

Likning (J.2) kan omskrives vha. *projeksjonstensoren*

$$P = \underline{I} + \vec{u}\otimes\underline{u} \tag{J.3}$$

der $\underline{I}$ er den vektorielle enhetsformen, som vi kan skrive

$$\underline{I} = \delta^\mu{}_\nu \vec{e}_\mu \otimes \underline{\omega}^\nu \tag{J.4}$$

og $\underline{u}$ har komponenter $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu$.

Vis at (J.2) kan skrives

$$\vec{a}_\perp = P(\ \ ,\vec{a}) \tag{J.5}$$

slik at komponentene av $\vec{a}_\perp$ og $\vec{a}$ er relatert via

$$a^\mu_\perp = P^\mu{}_\nu a^\nu \tag{J.6}$$

Siden $\vec{u}$ er tangentvektor til observatørens verdenslinje, er $P^\mu{}_\nu a^\nu$ projeksjonen av $\vec{a}$ i det romlige samtidighetsplan ortogonalt på tidvektoren i observatørens lokale ortonormale basis.

b) Anta observatøren er i ro i $K$. Finn de blandete og de kovariante komponentene til $P$.

c) La $\vec{a}$ være 4-akselerasjon til en partikkel. Hva slags bevegelse beskriver den kovariante likningen $P^{\mu}{}_{\nu}\frac{da^{\nu}}{d\tau} = 0$. Forklar! (Hint: Finn tid- og romkomponentene av denne likningen. I et instantant hvilesystem for partikkelen er $d\vec{a}/d\tau = (g^2, d\vec{g}/d\tau)$ der 3-vektoren $\vec{g}$ er hvileakselerasjonen).

d) Betrakt et intervall $dx^{\mu}$ i tidrommet. Det har en komponent ortogonalt på en 4-hastighet $\vec{u}$ gitt ved $d\sigma^{\mu} = P^{\mu}{}_{\alpha}dx^{\alpha}$. Det invariante romlige linjeelementet $d\ell$ er gitt ved $d\ell^2 = d\sigma_{\mu}d\sigma^{\mu}$, og komponentene til den romlige metriske tensoren, dvs. den metriske tensoren i det romlige planet ortogonalt på $\vec{u}$, er definert ved $d\ell^2 = \gamma_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$. Finn $\gamma_{\mu\nu}$ uttrykt ved $g_{\mu\nu}$ og $u^{\alpha}$.

Finn spesielt $\gamma_{ij}$ når $\vec{u}$ er 4-hastighet til en observatør som er i ro i $K$.

## Oppgave J2: Oppspalting av hastighetsfelt

*I: Ikke-relativistisk hastighetsfelt*

Vi studerer et hastighetsfelt $\vec{v}(\vec{x}, t)$. En partikkel beveger seg langs en bane $\vec{x}(t)$, med hastighet $\vec{v}[\vec{x}(t), t]$. Akselerasjon kan uttrykkes som

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{dt} \tag{J.7}$$

hvor $\frac{D\vec{v}}{dt}$ er den *totalderiverte* av hastighetsfeltet,

$$\frac{D\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}. \tag{J.8}$$

Her er $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ den *lokalt deriverte* og

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \tag{J.9}$$

er den *konvektivt deriverte*. Den lokalt deriverte beskriver endringen av $\vec{v}$ med tiden i en fast posisjon. Den konvektivt deriverte skyldes posisjonsavhengigheten til hastighetsfeltet.

a) Vis at den konvektivt deriverte kan skrives på matriseformen

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{J.10}$$

b) Her er elementene i $3 \times 3$-matrisen komponentene til hastighetsfeltets gradient. Spalt denne matrisen i tre deler, $v_{i,j} = \theta_{ij} + \omega_{ij} + \sigma_{ij}$, der $\theta_{ij}$ utgjør trasen, $\omega_{ij}$ en antisymmetrisk del og $\sigma_{ij}$ en trasefri, symmetrisk del. Her kalles $\theta_{ij}$ *ekspansjon*, $\omega_{ij}$ *rotasjon* og $\sigma_{ij}$ *skjær*.

*II: Relativistisk hastighetsfelt*

Vi studerer her et 4-hastighetsfelt $\vec{u}(\vec{x})$ (hvor $\vec{x}$ nå er et punkt i 4-rommet). En partikkel beveger seg med 4-hastighet $\vec{u}$. 4-akselersjonen er gitt ved den kovariant deriverte langs partikkelbanen,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} \tag{J.11}$$

der $\tau$ er egentiden til partikkelen. Den kan uttrykkes som

$$a_\alpha = u_{\alpha;\mu} u^\mu. \tag{J.12}$$

c) Hva slags bevegelse har en partikkel med null 4-akselerasjon, som beveger seg i et gravitasjonsfelt?

Projeksjonen av tensoren med komponenter $u_{\alpha;\beta}$ inn i det romlige samtidighetsplan ortogonalt på 4-hastigheten er

$$(u_{\alpha;\beta})_\perp = u_{\mu;\nu} P^\mu{}_\alpha P^\nu{}_\beta, \tag{J.13}$$

der $P^\mu{}_\nu$ er komponentene til projeksjonstensoren (se oppg. J1).

d) Spalt denne i ekspansjon, rotasjon og skjær på tilsvarende måte som i det ikke-relativistiske tilfellet.

e) Vis at uttrykkene for rotasjon og skjær kan skrives

$$\omega_{\alpha\beta} = u_{[\alpha;\beta]} + a_{[\alpha} u_{\beta]}, \quad \text{(koordinatbasis)} \tag{J.14}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = u_{(\alpha;\beta)} + a_{(\alpha} u_{\beta)} - \theta_{\alpha\beta}. \tag{J.15}$$

f) Vi antar nå at hastighetsfeltet beskriver bevegelsen til et fysisk referansesystem, f.eks, gitt ved en samling partikler. Skriv ned forslag til kovariante likninger som karakteriserer (lokalt) følgende typer referansesystemer:

1. Ikke-roterende system
2. Stivt system
3. Inertialsystem

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK K

## Oppgave K1: Ikke-relativistisk Kepler-bevegelse

a) Vi regner i første omgang gravitasjonspotensialet i avstand $r$ fra sola å være gitt ved $V(r) = -\frac{GM}{r}$, med $M$ som solmassen. Sett opp den klassiske Lagrangefunksjonen i sfæriske koordinater $(r, \theta, \phi)$ for en planet med masse $m$ som beveger seg i dette feltet. Sola regnes å være stasjonær.

Hva er den fysiske betydningen av den kanoniske impulsen $p_\phi = \ell$? Hvordan ser man av Lagrangefunksjonen at dette er en bevegelseskonstant? Finn Eulerlikningen for $\theta$ og vis at den kan bringes på formen

$$\frac{d}{dt}\left(mr^4\dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{m\sin^2\theta}\right) = 0. \tag{K.1}$$

Vis ut fra denne likningen at planeten beveger seg i et plan ved å velge retning på $z$-aksen slik at vi ved et gitt tidspunkt, $t = 0$, har $\theta = \frac{\pi}{2}$ og $\dot{\theta} = 0$.

b) Sett opp Eulerlikningen for $r$ og benytt denne til å finne $u = \frac{1}{r}$ som funksjon av $\phi$. Vis at banene som beskriver bundne tilstander er ellipser. Finn perioden $T_0$ for en sirkelbevegelse uttrykt ved radius $R$ i sirkelen.

c) Hvis sola ikke er helt sfærisk, men noe flattrykt, så vil tyngdefeltet i planet hvor sola har sin største utstrekning modifiseres til

$$V(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{Q}{r^3}. \tag{K.2}$$

$Q$ er en meget liten konstant. Vi antar at planeten beveger seg i planet hvor dette uttrykket for $V(r)$ er gyldig. Vis at sirkelbevegelsen fortsatt er mulig. Hva er nå sammenhengen mellom perioden $T$ og radien $R$?

d) Vi antar nå at bevegelsen avviker litt fra den rene sirkelbevegelse, $u = \frac{1}{R} + u_1$, hvor $u_1 \ll \frac{1}{R}$. Vis at $u_1$ varierer periodisk rundt banen,

$$u_1 = k\sin(f\phi). \tag{K.3}$$

Finn $f$ og påvis at banen dreier seg litt i rommet for hvert omløp. Hvor stor er vinkelen $\Delta\phi$ som planetbanen dreies på ett omløp?

Konstanten $Q$ kan skrives som $Q = \frac{1}{2}J_2 GMR_s^2$ hvor $J_2$ er kvadrupolmoment-parameter og $R_s$ er solradien. Observasjoner tyder på at $J_2 \lesssim 3 \cdot 10^{-5}$. Beregn hvor stor dreining $\Delta\phi$ av banen til Merkur dette maksimalt kan føre til, og undersøk om det er nok til å forklare den observerte perihelbevegelsen til Merkur-banen.

### Oppgave K2: Den lineære felt-approksimasjonen

Vi antar at gravitasjonsfeltet er svakt, og innfører et nært kartesisk koordinatsystem. Metrikken er gitt ved $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ der $\eta_{\mu\nu}$ er Minkowski-metrikken, $h_{\mu\nu} \ll 1$ og $h_{\mu\nu,\lambda}$ er liten.

Einsteins feltligninger er $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}$, der enhetene er valgt slik at $c = 1$. $R_{\mu\nu}$ er Ricci tensoren og $R \equiv R^{\beta}{}_{\beta}$ er den skalare krumningstensoren. $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ der

$$R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} \tag{K.4}$$

er Riemanns krumningstensor.

I den lineære approksimasjonen regnes bare til 1. orden i den metriske perturbasjonen $h$. Vis at Ricci tensoren da kan skrives:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}\right) \tag{K.5}$$

der $h \equiv h_{\alpha}{}^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$.

Vis at Einsteins feltligninger i denne approksimasjonen kan skrives

$$h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta,}{}^{\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta}) = 16\pi G T_{\mu\nu} \tag{K.6}$$

Denne ligningen kan forenkles ved å innføre størrelsen $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. Anta $\bar{h}$ oppfyller betingelsen $\bar{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha} = 0$ (Lorenz gauge). Vis at feltligningen da kan skrives

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = -16\pi G T_{\mu\nu} \tag{K.7}$$

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK L

## Oppgave L1: Schwarzschild-løsningen uttrykt i isotrope koordinater

a) En ny radiell koordinat $\rho$ innføres slik at Schwarzschild-metrikken får formen (med enheter slik at $G = c = 1$)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{L.1}$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r(\rho)}\right) dt^2 + f^2(\rho)(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2) \tag{L.2}$$

der $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Bestem funksjonene $r(\rho)$ og $f(\rho)$, og skriv opp det eksplisitte uttrykk for linjeelementet med $\rho$ som radiell koordinat.

b) Hvilken verdi har $\rho$ på Schwarzschild-horisonten, $r = 2M$? og i origo, $r = 0$? Schwarzschild-koordinatene $t$ og $r$ bytter roller som tid- og radiell-koordinat når $r < 2M$ Hvordan oppfører $t$ og $\rho$ seg innenfor horisonten.

## Oppgave L2: Gravitasjonsfeltet utenfor en punktmasse i ro

En punktmasse med masse $m$ befinner seg i origo i det nær kartesiske koordinatsystemet fra oppgave K2. Dens energi-impuls tensor er $T_{00} = m\delta(\vec{r})$, $T_{\mu j} = 0$ ($\mu = \{0, i\}$), der $\delta(\vec{r})$ er den tredimensjonale $\delta$-funksjonen.

a) Vis at når vi skriver feltligningene i den linære feltapproksimasjonen på formen

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = -16\pi G T_{\mu\nu} \tag{L.3}$$

så har de i dette tilfelle løsningen

$$\bar{h}_{00} = \frac{4Gm}{r}, \qquad \text{der} \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \tag{L.4}$$

$$\bar{h}_{\mu i} = 0. \tag{L.5}$$

b) Vis at $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$ og finn formen til det infinitesimale linjeelementet utenfor punktmassen.

c) Innfør sfæriske koordinater og sammenlign med de oppgitte linje-elementene i L1 a) når disse metrikkene skrives til 1.orden i $M/r$ (eventuelt $M/\rho$). Hva observerer du?

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK M

## Oppgave M1: Romskip som faller i et sort hull

a) I denne oppgaven brukes enheter slik at lyshastigheten $c = 1$. Vi tenker oss et romskip ($A$) som faller radielt inn i et (Schwarzschild) sort hull med masse $M = 5M_\odot$. Hva er Schwarzschild-radius til det sorte hullet? Sett opp bevegelseslikningene for romskipet i Schwarzschild-koordinatene $r$ og $t$, med egentid $\tau$ som baneparameter. Ved tidspunktet $t = \tau = 0$ befinner romskipet seg i posisjon $r = 10^{10}$ m. Total energien er lik romskipets hvileenergi. Løs likningen for $r$ med disse randbetingelsene. Hvor lang (egen)tid bruker romskipet på å nå Schwarzschild-radius, og hvor lang tid bruker den på å nå til singulariteten.

b) Vis at romskipet, idet Schwarzschild-radius passeres, maksimalt bruker tiden $\Delta\tau = \pi GM$ på å nå inn til singulariteten, samme hvordan romskipet manøvreres. Hvordan skal det manøvreres for å maksimalisere denne tiden? (Hint: Vis ut fra uttrykket for linjeelementet i Schwarzschild metrikken at $d\tau \leq dr/\sqrt{r_s/r - 1}$ når romskipet befinner seg på innsiden av Schwarzschild radien $r_s$.)

c) Romskipet ($A$) har radiokontakt med en romstasjon (B) som er stasjonær i punktet $r_B = 1$ lysår. Radiosignalene sendes med jevne tidsinterval $\Delta T$ og fast frekvens $\omega$ både fra $A$ og $B$. Mottakeren i $A$ mottar signaler med frekvens $\omega_A$ og mottakeren i B signaler med frekvens $\omega_B$. Beregn $\omega_A$ og $\omega_B$ som funksjoner av romskipets posisjon. (Hint: Gjør utregningen i to trinn. Finn først ut forandringen i frekvens mellom to stasjonære inertialsystem i punktene $r_B$ og $r_A$ (romskipets posisjon). Beregn deretter frekvensforandringen ved overgang til et inertialsystem med romskipets hastighet.) Undersøk om det skjer noe spesielt med frekvensene $\omega_A$ og $\omega_B$ idet romskipet passerer Schwarzschild-radius. Benytt resultatene til å diskutere hvordan det som skjer i romskipet oppfattes for romstasjonene, og omvendt.

Oppgave M2: Merkurs perihel-presesjon og den kosmologiske konstanten

a) I det tilfellet at den kosmologiske konstanten $\Lambda$ er forskjellig fra null, får Einsteins likninger i vakuum formen $E_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\Lambda g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$. Generaliser Schwarzschild-løsningen for dette tilfellet ved å vise at metrikken blir

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} + r^2 d\Omega^2, \tag{M.1}$$

der enheter slik at $c = G = 1$ er brukt.

b) Vis at banelikningen for frie partikler i metrikken som er funnet i a) har formen (her er $u = \frac{1}{r}$)

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{M}{L^2} + 3Mu^2 - \frac{\Lambda}{3L^2u^3}. \tag{M.2}$$

$L$ er partikkelens impulsmoment pr. masseenhet.

c) Finn perihel-presesjonen pr. omløp som denne banelikningen leder til. (Hint: Anta at banen kan beskrives som en perturbasjon om en sirkelbane.)

d) Beregningene uten $\Lambda$-leddet gir overensstemmelse med observasjon med en nøyaktighet på $1''$ pr. århundre. Hvilken begrensning gir dette på størrelsen til $\Lambda$?

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK N

## Oppgave N1: Tidrommet inni og utenfor et roterende kuleskall

Et sfærisk kuleskall med masse $M$ og radius $R$ roterer med konstant vinkelhastighet $\omega_s$. I denne oppgaven skal metrikken inni og utenfor skallet finnes som løsning av feltlikningene i den lineære feltapproksimasjonen (oppg K2)

$$\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta} \tag{N.1}$$

der $\bar{h}_{\alpha\beta}$ er den metriske perturbasjonen av Minkowski metrikken, dvs. $\bar{h}_{\alpha\beta}$ er uttrykt i tilnærmet kartesiske koordinater $(t, x, y, z)$. Rotasjonen antas å være ikke-relativistisk, slik at beregningene kun gjøres til 1. orden i $R\omega_s$.

Anta at skallet kan betraktes som *støv*, slik at energi-impuls tensoren er gitt ved

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \rho u_\mu u_\nu, \qquad \rho = M\delta(r-R)/4\pi R^2, \\ u_\mu &\approx (-1, -R\omega_s \sin\theta \sin\phi, R\omega_s \sin\theta \cos\phi, 0) \end{aligned} \tag{N.2}$$

der

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta \tag{N.3}$$

a) Bestem metrikken innenfor og utenfor kuleskallet og vis at

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{R}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &\quad -\frac{8}{3}\frac{M\omega}{R} r^2 \sin^2\theta d\phi dt, \qquad r < R \\ ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &\quad -\frac{4J}{r}\sin^2\theta d\phi dt, \qquad r > R \end{aligned} \tag{N.4}$$

der $J = (2/3)MR^2\omega_s$ er skallets impulsmoment. (Hint: Beregn $g_{0\phi}$ ved først å finne $\bar{h}_{0y}$. Pga. aksialsymmetrien er $g_{0\phi} = g_{\phi\phi}^{1/2}[g_{0y}]_{\phi=0}$. Anta at $\bar{h}_{0y}$ har formen $\bar{h}_{0y} = f(r)\sin\theta\cos\phi$.)

b) Vis at Kerr-metrikken reduseres til den som er funnet under a), for $r > R$, når $r \gg M$. (Hint: Ekspander Kerr-metrikken til 1. orden i $J/Mr$, innfør så isotrope koordinater ($r \to \rho$, se oppg L1) og ekspander resultatet til 1. orden i $M/\rho$.) Bruk resultatet til å vise at konstantan $a$ i Kerr-metrikken er lik kuleskallets spinn pr. masseenhet.

c) Finn vinkelhastigheten

$$\omega_L = -g_{0\phi}/g_{\phi\phi} \tag{N.5}$$

som lokale inertialsystemer roterer med, i forhold til inertialsystemer langt borte.

## Oppgave N2: Kinematikk i Kerr-tidrommet

Et elektrisk nøytralt, roterende sort hull kalles et Kerr sort hull. Når tidrommet utenfor et Kerr sort hull beskrives i Boyer-Lindquist (BL) koordinater tar linje-elementet formen

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\mu}dr^2 + e^{2\lambda}d\theta^2 + e^{2\psi}(d\phi - \omega dt)^2, \tag{N.6}$$

der

$$\begin{aligned} e^{2\nu} &= \frac{\rho^2\Delta}{\Sigma^2}, \quad e^{2\mu} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad e^{2\lambda} = \rho^2 \\ e^{2\psi} &= \left(\frac{\Sigma^2}{\rho^2}\right)\sin^2\theta, \quad \omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{2Mar}{\Sigma^2} \\ \rho^2 &= r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad \Sigma^2 = (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta \end{aligned}$$

Her er $M$ hullets masse og $a$ dets spinn pr. masseenhet.

a) Betrakt lys som beveger seg i positiv og negativ $\phi$-retning. Hvilken koordinathastighet

$$c_\phi = \frac{d\phi}{dt} \tag{N.7}$$

har lyset?

Vi vil nå undersøke Sagnac-effekten i Kerr-tidrommet. En sender-mottaker er festet til et fast punkt i BL-koordinatsystemet. Lyssignaler med frekvens $\nu$ sendes ved hjelp av speil i begge retninger langs sirkelen $r = r_0$, $\theta = \pi/2$. Finn faseforskjellen for lys som har gått i motsatte retninger, når signalene treffer mottakeren.

Resultatet viser at BL-koordinatsystemet likner et roterende koordinatsystem når en befinner seg i en endelig avstand $r$ fra det sorte hullet. Ser koordinatsystemet ut til å rotere når man befinner seg uendelig langt ute?

b) Betrakt en fri partikkel i Kerr-tidrommet. Anta den beveger seg i $\phi$-retningen, med en vinkelhastighet

$$\Omega = d\phi/dt \tag{N.8}$$

i forhold til BL-koordinatene. Sett opp Lagrangefunksjonen $L$ til partikkelen og finn dens impulsmoment,

$$p_\phi = \partial L/\partial\dot{\phi}. \tag{N.9}$$

Hvor stor vinkelhastighet har en partikkel med null impulsmoment?

c) En observatør med null impulsmoment kalles en $ZAMO$ (*Zero Angular Momentum Observer*). Betrakt spesielt en $ZAMO$ med faste $r$- og $\theta$-koordinater. Er en slik $ZAMO$ i fritt fall?

I det følgende brukes betegnelsen $ZAMO$ om de spesielle observatørene med faste $r$- og $\theta$-koordinater. Innfør et ortonormalt basisfelt $(\vec{e}_{\hat{t}'}, \vec{e}_{\hat{r}'}, \vec{e}_{\hat{\theta}'}, \vec{e}_{\hat{\phi}'})$, der $\vec{e}_{\hat{t}'}$ er 4-hastigheten til en $ZAMO$. De duale basis en-formene er

$$\begin{aligned} \underline{\omega}^{\hat{t}'} &= e^{\nu}\underline{\omega}^{t}, & \underline{\omega}^{\hat{r}'} &= e^{\mu}\underline{\omega}^{r}, \\ \underline{\omega}^{\hat{\theta}'} &= e^{\lambda}\underline{\omega}^{\theta}, & \underline{\omega}^{\hat{\phi}'} &= e^{\psi}(\underline{\omega}^{\phi} - \omega\underline{\omega}^{t}). \end{aligned} \tag{N.10}$$

Vis at

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\hat{t}'} &= e^{-\nu}(\vec{e}_t + \omega\vec{e}_\phi), & \vec{e}_{\hat{r}'} &= e^{-\mu}\vec{e}_r, \\ \vec{e}_{\hat{\theta}'} &= e^{-\lambda}\vec{e}_\theta, & \vec{e}_{\hat{\phi}'} &= e^{-\psi}\vec{e}_\phi, \end{aligned} \tag{N.11}$$

der $(\vec{e}_t, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ er koordinatbasisvektorene i BL-koordinatsystemet.

Vis at den fysiske hastigheten til partikkelen i punkt b), målt av en $ZAMO$, er

$$v^{\hat{\phi}'} = e^{\psi-\nu}(\Omega - \omega). \tag{N.12}$$

Hva er hastigheten $v_0^{\hat{\phi}'}$ til et fast koordinatpunkt målt av en $ZAMO$?

d) Innfør et ortonormalt basisfelt gitt ved uttrykkene

$$\vec{e}_{\hat{0}} = (-g_{00})^{-1/2}\vec{e}_0, \qquad \vec{e}_{\hat{i}} = (\gamma_{ii})^{-1/2}[\vec{e}_i - (g_{i0}/g_{00})\vec{e}_0] \tag{N.13}$$

der

$$\gamma_{ii} = g_{ii} - g_{i0}^2/g_{00}$$

Vis at

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\hat{t}} &= \hat{\gamma} e^{-\nu} \vec{e}_t, \qquad \vec{e}_{\hat{r}} = e^{-\mu} \vec{e}_r, \\ \vec{e}_{\hat{\theta}} &= e^{-\lambda} \vec{e}_r, \qquad \vec{e}_{\hat{\phi}} = \hat{\gamma}^{-1} e^{-\psi} \vec{e}_\phi + \hat{\gamma} e^{-\nu} v_0^{\hat{\phi}'} \vec{e}_t, \end{aligned} \tag{N.14}$$

der $\hat{\gamma} = (1 - (v_0^{\hat{\phi}'})^2)^{-1/2}$. Finn de duale basis en-formene. Vektoren $\vec{e}_{\hat{t}}$ er 4-hastigheten til en partikkel i ro i BL-koordinatsystemet, dvs. til en *statisk* partikkel.

e) Finn den fysiske hastigheten $v^{\hat{\phi}}$ til partikkelen fra punkt b), målt av en statisk observatør. Hvilken sammenheng er det mellom $v^{\hat{\phi}'}$, $v^{\hat{\phi}}$, og $v_0^{\hat{\phi}'}$? Vis at det ortonormale basisfeltet assosiert med en statisk observatør og det assosiert med en $ZAMO$ er forbundet med en Lorentz transformasjon.

# FYS307 - V03

# OPPGAVEARK O

## Oppgave O1: Den kosmiske frekvensforskyvning

Vi skal i denne oppgaven studere den kosmiske rødforskyvningen i et ekspanderende univers og vise at denne, for små avstander mellom sender og mottaker, kan deles i en kinematisk og en gravitasjonell del.

I medfølgende koordinater kan metrikken i det ekspanderende univers skrives på formen

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + r^2(\chi)d\Omega^2]. \tag{O.1}$$

En observatør $O$ plasseres i origo av koordinatsystemet med $\chi = 0$. Observatøren mottar lys fra en galakse $G$ i posisjon $\chi_e$. Avstanden fra $O$ til $G$ er

$$D = a(t)\chi_e \tag{O.2}$$

Lyset som sendes ut ved tidspunktet $t_e$, når $O$ ved tidspunktet $t_0$. $G$'s hastighet ved tidspunkt $t_e$ er

$$V_e = \dot{a}_e\chi_e, \qquad \dot{a}_e = (da/dt)_{t=t_e} \tag{O.3}$$

Hubble parameteren ved tidspunktet $t_0$ er

$$H_0 = \dot{a}_0/a_0, \qquad a_0 = a(t_0), \qquad \dot{a}_0 = (da/dt)_{t=t_0} \tag{O.4}$$

Deselerasjonsparameteren ved tidspunkt $t_0$ er

$$q_0 = -\ddot{a}_0 a_0/\dot{a}_0^2, \qquad \ddot{a}_0 = (d^2a/dt^2)_{t=t_0} \tag{O.5}$$

Vi antar at avstanden fra $O$ til $G$ er liten i forhold til universets radius. Vis at denne antagelsen kan uttrykkes slik:

$$H_0(t_0 - t_e) \ll 1. \tag{O.6}$$

Ta med ledd til 2. orden i $H_0(t_0 - t_e)$ i alle rekkeutviklinger du får bruk for i det følgende.

Bølgelengde-forskyvningen til lys som utsendes med bølgelengden $\lambda_e$ og mottas med bølgelengde $\lambda_0$, måles ved størrelsen

$$z = (\lambda_0 - \lambda_e)/\lambda_e. \tag{O.7}$$

Vis at den kosmiske bølgelengde-forskyvning for lys som sendes fra $G$ til $O$ kan skrives som

$$z = \frac{a_0}{a_e} - 1, \tag{O.8}$$

og til 2. orden i $H_0(t_0 - t_e)$,

$$z = H_0(t_0 - t_e) + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) H_0^2(t_0 - t_e)^2. \tag{O.9}$$

Vi innfører nå to størrelser $z_K$ og $z_G$, en kinematisk og en gravitasjonell frekvensforskyvning, definert på følgende måte. $z_K$ er forskyvning i bølgelengde for lys utsendt av $G$ og mottatt av en observatør $A$ som er i ro i forhold til $O$ og som befinner seg i samme posisjon som $G$. Dvs. $A$ har en hastighet $V_e$ i forhold til $G$. $z_G$ er forskyvning i bølgelengde for lys utsendt av $A$ og mottatt av $O$.

Vis at $z \approx z_K + z_G$ når $z_K \ll 1$ og $z_G \ll 1$. Finn $z_K$ ved å ta utgangspunkt i likningen for Doppler effekten fra den spesielle relativitetsteorien

$$z_K = [(1 + V_e)/(1 - V_e)]^{1/2} - 1. \tag{O.10}$$

Vis, ved å bruke uttrykkene for $z$ og $z_K$, at

$$z_G = -\frac{1}{2}q_0 H_0^2(t_0 - t_e)^2. \tag{O.11}$$

Tolk fortegnet til $z_G$ og gi en fysisk forklaring på det.

Universet er massedominert ved tidspunkt $t_0$, slik at $p \ll \rho$, der $p$ er trykket og $\rho$ massetettheten i universet. Vis at Friedmanns likninger med $p = 0$, $\Lambda = 0$, der $\Lambda$ er den kosmologiske konstanten , gir

$$q_0 H_0^2 = \frac{4\pi}{3} G\rho_0, \qquad \rho_0 = \rho(t_0). \tag{O.12}$$

Definer nullnivå for det kosmiske gravitasjonspotensial i $O$'s posisjon. Beregn, i den Newtonske tilnærmelsen, det kosmiske gravitasjonspotensial $\phi_e$ i senderens posisjon, og vis at

$$z_G = -\phi_e. \tag{O.13}$$

### Oppgave O2: Gravitasjonskollaps

I denne oppgaven vil gravitasjonskollaps bli beskrevet ved Oppenheimer-Snyder løsningen av Einsteins feltligninger.

Ved å løse Einstein's feltligninger for vakuum *utenfor* et sfærisk symmetrisk legeme, dvs. for en metrikk av formen

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)}dt^2 + e^{2\beta(r,t)}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{O.14}$$

finner man at løsningen alltid kan reduseres til den statiske Schwarzschild metrikken,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{O.15}$$

Dette kalles *Birkhoff's teorem.*

I denne oppgaven skal du finne en løsning av Einstein's feltligninger som beskriver sfærisk symmetrisk gravitasjonskollaps. Løsningen skal beskrive tidrommet både utenfor stjernen og inni den. For å kunne knytte sammen de to delene av løsningen, må den indre- og den ytre metrikken beskrives i samme koordinater. Vi antar at den indre løsningen har samme form som en Friedmann løsning. Friedmann løsningene er beskrevet i medfølgende koordinater, dvs. fritt fallende partikler har konstante romlige koordinater.

De innfallende koordinatene betegnes $(r', \tau)$. Her er $\tau$ egentiden til en fritt fallende partikkel, som starter fra ro i det uendelig fjerne. Disse koordinatene er knyttet sammen med Schwarzschild-koordinatene ved betingelsen

$$r' = r \quad \text{for} \quad \tau = 0. \tag{O.16}$$

a) Vis at transformasjonen mellom Schwarzschild-koordinater og de innfallende koordinater utenfor stjernen er

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2}{3}(2M)^{-1/2}(r'^{3/2} - r^{3/2}), \\ t &= \tau - 4M\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + 2M \ln \frac{(r/2M)^{1/2} + 1}{(r/2M)^{1/2} - 1}, \end{aligned}$$

der $M$ er Schwarzschild-massen til stjernen. Vis at Schwarzschild-metrikken i disse koordinatene tar formen

$$\begin{aligned} ds^2 &= -d\tau^2 + \left[1 - \frac{3}{2}(2M)^{1/2}\tau r'^{-3/2}\right]^{-2/3} dr'^2 \\ &\quad + \left[1 - \frac{3}{2}(2M)^{1/2}\tau r'^{-3/2}\right]^{4/3} r'^2 d\Omega^2. \end{aligned} \tag{O.17}$$

Vis at metrikken ikke er singulær ved Schwarzschildradien. Hvor er den singulær?

b) Anta at stjernen har en posisjonsuavhengig tetthet $\rho(\tau)$ og at trykket i stjernen er null. (Et positivt trykk øker tendensen til kollaps.) Anta videre at tidrommet i stjernen er beskrevet ved en Friedmann løsning med Euklidsk romlig geomtri ($k = 0$). Finn løsningen. Stjernens radius ved tidspunktet $\tau = 0$ er $R_0$.