# Inhomogene differensiallikninger av andre orden

## *Ubestemte koeffisienters metode og variasjon av parameterene. Oppsummering.*

Forelesning uke 46, 2005

MAT-INF1100



## Inhomogen differensiallikning av andre orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (INH2).$$

**Klassifisering:** lineær, inhomogen, variable koeffisienter, orden 2.

**Oppdeling av løsning** *( K. 10.5.1)*
Den generelle løsningen av (INH2) kan skrives

$y = y_p + y_h$,

der $y_p$ er en valgt løsning av (INH2), mens $y_h$ løser den homogene likningen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.



**Bevis** *( K. 10.5.1)*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (INH2).$$

Anta at $y$ og $y_p$ er løsninger av (INH2). Vi må da vise at $z = y - y_p$ er en løsning av den homogene likningen.

$$\begin{aligned} &z'' + p(x)z' + q(x)z \\ &= (y - y_p)'' + p(x)(y - y_p)' + q(x)(y - y_p) \\ &= y'' + p(x)y' + q(x)y - (y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p) \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$



## Ukjente koeffisienters metode

Lineær, inhomogen, konstante koeffisienter

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

For enkelte former av $f$ gjetter vi på en $y_p$ som likner, men som inneholder koeffisienter som vi bestemmer ved innsetting.
Denne $y_p$ kombineres så med den generelle løsning av den homogene likningen

$y'' + py' + qy = 0$.

Initialbetingelser tilpasses så i $y = y_h + y_p$.



## Ukjente koeffisienters metode, forts. 1

**Regel 1:** $f(x)$ er et polynom.
$y_p$ velges vanligvis som et polynom av samme grad som $f$
Unntak: $y_h = 1$ er homogenløsning $\Rightarrow$ grad økes med 1.
Er $y_h = x$ også homogenløsning økes graden med 2 (da er $p = q = 0$ og $y'' = f$).

**Regel 2:** $f(x) = p(x)e^{\alpha x}$, der $p$ er et polynom.
$y_p = Q(x)e^{\alpha x}$ der $Q$ er et polynom av samme grad som $p$.
Unntak: $e^{\alpha x}$ er homogenløsning $\Rightarrow$ grad økes med 1.
Er $xe^{\alpha x}$ også homogenløsning ($\alpha$ dobbel rot i kar. pol.) $\Rightarrow$ grad økes med 2.

Kalkulus: $e^{\alpha x} = a^x$, der $a = e^{\alpha}$.



## Ukjente koeffisienters metode, forts. 2

**Regel 3:** $f(x) = p(x)e^{\alpha x}(A\cos bx + B\sin bx)$,
$p$ - polynom.

$y_p = e^{\alpha x}(Q\cos bx + P\sin bx)$ der $Q$, $P$ er polynomer av samme grad som $p$.
Unntak: $e^{\alpha x}\cos bx$ homogenløsning $\Rightarrow$ grad av $Q$, $P$ økes med 1.

Litt generalisert i forhold til Kalkulus, der $p = 1$.



## Nok en variasjon av parameteren*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (INH2).$$

Tillater variable koeffisienter.
Dersom vi kjenner en homogenløsning $u(x)$ kan vi sette inn $y_p = u(x)v(x)$. $\Rightarrow$ ledd faller og

$$v'' + (2\tfrac{u'}{u} + p)v' = \tfrac{f}{u} \qquad (VL).$$

Løsning

- $f = 0$ finner en annen homogenløsning. Brukt i *K. kap. 10.4*
- $f \neq 0$ (VL) er en inhomogen, lineær førsteordenslikning for $v'$. Vi kan bruke formel *K. 10.1.3*



## Variasjon av to parametere*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (INH2).$$

To homogenløsning $y_1$, $y_2$. Setter inn
$y_p = c(x)y_1 + d(x)y_2$. $\Rightarrow$ ledd med nulltederiverte av $c$ og $d$ faller og

$(c'y_1 + d'y_2)' + c'y_1' + d'y_2' + p(c'y_1 + d'y_2) = f$

Tidligere $d = 0$ eller $c = 0$; kan istedet velge $c$, $d$ s.a.

$c'y_1 + d'y_2 = 0, \quad c'y_1' + d'y_2' = f \Rightarrow$

$c' = -\frac{y_2 f}{W}, \quad d' = \frac{y_1 f}{W}$.

$W = y_1y_2' - y_1'y_2$ – Wronski-determinanten.

Kan overføres til likninger av høyere orden.

## Oppsummering

**Lineær førsteordenslikning;**
$y' + f(x)y = g(x), \quad y(a) = y_0$

$$y = e^{-\int_a^x f(\hat{x})\,d\hat{x}} \left( \int_a^x g(\hat{x}) e^{\int_a^{\hat{x}} f(t)\,dt} d\hat{x} + y_a \right).$$

**Separabel førsteordenslikning;** $q(y)\,y' = p(x)$

$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$

**Lineær, homogen, andreordenslikning med konst. koeff;**
$y'' + py' + qy = 0$

Gjett $e^{rx}$ der $r^2 + pr + q = 0$ (karakteristisk likning).
Tilfeller: 1: to $r \in \mathbb{R}$, 2: en $r \in \mathbb{R}$, 3: to $r \in \mathbb{C}$.



## Oppsummering, forts.

**Initialverdiproblem andreordenslikning med konst. koeff;**
$y'' + py' + qy = 0$, **y(a)=d, y'(a)=h**

Har entydig løsning.

**Inhomogen andreordenslikning;** $y'' + py' + qy = f(x)$

$y$ = $y_p$ + $y_h$
gen. part. hom.

$y_p$ finnes med

- Ukjente koeffisienter ($p$, $q$ konstante)
- Variasjon av parametere ( en $y_h$ kjent)



## Eksistens er ikke selvsagt*

$y' = 1 + y^2$ for $x \geq 0, \quad y(0) = 1.$

**Klassifisering:** Ikkelineær, orden 1, separabel.
Eksisterer løsning ?

Separabilitet $\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx = x + C.$

Integrasjon av venstre side:

$\arctan(y) = x + C \quad \Rightarrow y = \tan(x + C)$

Initialbetingelse $\Rightarrow C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} y(x) = \infty$

Løsning eksisterer ikke for $x \geq \frac{\pi}{4}$;
SPONTAN SINGULARITET – mulig i ikkelineær likning.