Differensiallikninger

Definisjoner og løsning i formel

Forelesning uke 45, 2006

MAT-INF1100

Differensiallikninger

Struktur i presentasjonen
Lysarkene gjennomgår hovedpunkter fra Kalkulus kap. 10.1-10.4 og litt fra 10.6. En alternativ løsning av lineær førsteordenslikning, som ikke står i Kalkulus, og noen eksempler er også tatt med. Mange detaljer er utelatt i utledninger og regninger, selv om de viktigste mellomsteg er inkludert.
Henvisninger til feks. sats 10.3.2 i Kalkulus skrives *K. 10.3.2*.
Noen steder refereres likninger med gitte navn.

Hva er en differensialikning?

En algebraisk likning har ett (eller flere) tall som ukjente. Eksempel:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Løsningene $x = -2$ og $x = 3$ er de verdiene for x som oppfyller relasjonen.

En differensiallikning er en relasjon mellom en funksjon og dens deriverte. Funksjonen er den ukjente. Eksempel

$$y' + y = 0 \qquad \text{for} \qquad x \in \mathbb{R}$$

En løsning $y(x)$ oppfyller denne for alle reelle x. Insetting $\Rightarrow$ $y(x) = e^{-x}$ er en løsning. Det er ikke feks. $y = x$ som oppfyller likningen bare for $x = -1$.

Hvorfor studere differensiallikninger ?

Differensiallikninger er helt sentrale for fysiske fag og ingeniørvitenskap.

Klasse av eksempler
Hvordan en tilstand endrer seg i tiden avhenger av tilstanden selv.
Kan tilstanden beskrives ved en funksjon av tiden, $y(t)$, kan endringen beskrives ved $y'(t)$ siden dette er endringsraten av y mhp. t. Resultatet er en relasjon mellom $y(t)$ og $y'(t)$.

Eksempel A: nedbrytning av radioaktivt stoff

Vi har en masse $M(t)$ av et radiokativt stoff. Hvert atom har en viss sannsynlighet for å forvandles (emmitere α eller β partikler) i et gitt tidsrom. Endringsraten av massen er da proposjonal med massen selv. Dersom vi starter med masse M_0 har vi det matematisk problemet

$$M' = -kM, \quad M(0) = M_0$$

En differensiallikning for M i t og en initialbetingelse. k er avhengig av hvor radiokativt stoffet er.
K. eksempel 10.2.3.

Klassifisering: Første orden, lineær, konst. koeff., homogen.
Likninger av denne typen skal vi snart løse.

Eksempel B: Kjemisk reaksjon

Oksydasjon av nitrogenmonoksyd til nitrogendioksyd

$$2NO + O_2 = 2NO_2$$

To NO molekyler reagerer med ett O_2 til NO_2.
Konsentrasjoner: $C_{NO}(t)$, $C_{O_2}(t)$, $C_{NO_2}(t)$. (molekyler per volum)
Reaksjonsrate er proposjonal med $C_{NO}^2 C_{O_2}$
($\sim$sannsynlighet for "sammenstøt" av 2 NO og ett O_2 molekyl).

$$\frac{\mathrm{d}C_{NO}}{\mathrm{d}t} = -kC_{NO}^2 C_{O_2},$$

der k er en konstant.
Det inngår ennå to ukjente.

Eksempel B forsetter

Bevaring av masse
Startkonsentrasjoner: $C_{NO}(0) = a$, $C_{O_2}(0) = b$
Massebevaring (V er totalt volum)

$$V(C_{NO} - a) = 2V(C_{O_2} - b),$$

som gir $C_{O_2} = B + \frac{1}{2}C_{NO}$ der $B = b - \frac{1}{2}a$.

Insatt i reaksjonslikning:

$$\frac{\mathrm{d}C_{NO}}{\mathrm{d}t} = -kC_{NO}^2(B + \frac{1}{2}C_{NO}), \quad C_{NO}(0) = a$$

Klassifisering: Første orden, ikkelineær, separabel (forklart senere)
Denne kan vi også "regne på".

Eksempel C: Bevegelse av partikkel

Newton's 2 lov, rettlinjet bevegelse

$$ma = F,$$

der m = masse, a = akselerasjon og F = kraft.
Posisjon gis som $y(t) \Rightarrow a \equiv \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$.
Hvis kraft avhenger av posisjon, hastighet og tid:
$F = F(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, t)$
Newton's 2 lov $\Rightarrow$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, t)$$

Differensiallikning av orden 2.

Eksempel C: Konkret tilfelle

Fallskjermhopperen fra kompendiet

Legeme i fritt fall (y måles vertikalt nedover)

$$F = \underbrace{mg}_{\text{tyngde}} - \underbrace{Cu^2}_{\text{luftmotstand}},$$

der fart $u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{C}{m}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Klassifisering: Andre orden, ikkelineær, separabel (forklares siden)

Lineær likning av orden 1.

K. kap.10.1

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad \text{(IN)}$$

Skal oppfylles i et intervall

Knep: integrerende faktor
En integrerende faktor er en funksjon vi ganger likningen med slik at vi kan integrere den opp direkte.
Er oftest vanskelig (eller umulig) å finne.

Her kan vi bruke faktoren

$$e^{F(x)}$$

der F er antiderivert til f; dvs. $F' = f$.

Bruk av integrerende faktor

Multiplikasjon med faktor ($F' = f$)

$$e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = e^{F(x)}g(x)$$

For andre ledd har vi $e^{F(x)}f(x) = e^{F(x)}F'(x) = (e^{F(x)})' \Rightarrow$

$$e^{F(x)}y' + \left(e^{F(x)}\right)'y = e^{F(x)}g(x)$$

Produktregel gir så

$$\left(e^{F(x)}y\right)' = e^{F(x)}g(x)$$

Nå kan begge sider integreres

...

Integrasjon gir

$$e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x)dx + C$$

Der C er en vilkårlig konstant
Alle løsninger av likningen vår kan da skrives

$$y = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)dx + C\right)$$

Dette er setning *K. 10.1.3*

Sidebetingelse; entydighet *K. kap.10.3*

Vi har løst

$$y' + f(x)y = g(x), \qquad \text{for} \qquad x \in I$$

Legger til betingelsen $y(c) = d$ der $c \in I$. Er c (venstre) endepunkt i I kalles dette en initialbetingelse.
Nå finnes det bare èn løsning.

Vi viser entydighet og bestemmer løsningen samtidig.

...

Trinn 1

$$y = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)dx + C\right)$$

F er en hvilken som helst antiderivert til f og det ubestemte integralet ovenfor kan også velges fritt.

Uten tap av generalitet velger vi $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ og *K. 10.1.3* skrives (C er stadig valgbar)

$$y = e^{-\int_c^x f(t)dt}\left(\int_c^x e^{\int_c^t f(s)ds}g(t)dt + C\right)$$

(Husk: $F(t) = \int_c^t f(s)ds$)

...

Trinn 2 Vi bestemmer C slik at $y(c) = d$

$$d = y(c) = e^{-\int_c^c f(t)dt}\left(\int_c^c e^{\int_c^t f(s)ds}g(t)dt + C\right) = C$$

dvs $C = d$ og *(K. 10.3.1)*

$$y = e^{-\int_c^x f(t)dt}\left(\int_c^x e^{\int_c^t f(s)ds}g(t)dt + d\right)$$

Dette er den eneste løsningen.

Eksempel A: løsning

Nedbrytning av radioaktivt stoff

$$M' = -kM, \quad M(0) = M_0$$

Klassifisering: Første orden, lineær, konst. koeff., homogen.
Fri variabel: tid betegnes med x. Svarer til

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad \text{(IN)}$$

med $f \equiv k$, $g \equiv 0$ og $y \to M$. Kan bruke *K. 10.3.1*, men starter fra

$$y = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)dx + C\right)$$

der $F = \int f(x)dx$

...

Her er $F(x) = -\int k\,dx = kx$ og $M(x) = Ce^{-kx}$
Initialbetingelse gir $M_0 = M(0) = C$, $\Rightarrow$

$$M(x) = M_0 e^{-kx}$$

Halveringstid, $t_{\frac{1}{2}}$ er definert ved $M(T + t_{\frac{1}{2}})/M(T) = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{M(T + t_{\frac{1}{2}})}{M(T)} = \frac{M_0 e^{-k(T+t_{\frac{1}{2}})}}{M_0 e^{-kT}} = e^{-kt_{\frac{1}{2}}}$$

Bruk av logaritmen på begge sider

$$t_{\frac{1}{2}} = \log(2)/k$$

Kommentar til løsning av $M' + kM = 0$

Homogen likning av første orden med konstant koeffisisent har en eksponentialfunksjon $M = e^{-kx}$ som løsning. Dette henger sammen med at eksponentialfunksjonen $e^{\alpha x}$ har α ganger seg selv som derivert. Setter vi $e^{\alpha x}$ inn i

$$M' + kM = 0,$$

vil begge ledd ha formen: konstant$\times e^{\alpha x}$.
For $\alpha = -k$ vil de nulle hverandre ut og vi har en løsning.

Siden skal vi se at ekspontialfunksjonen (og sin og cos) spiller en tilsvarende rolle for andre lineære likninger med konstante koeffisienter.

Lineær, homogen likning av orden 1

Alternativ (til *K. kap. 10.1*) løsning av homogen likning av orden 1

$$y' + f(x)y = 0$$

Vi skriver den om til (fri variabel x)

$$\frac{1}{y}y' = -f(x)$$

som har form:

Funksjon av y ganger y' = funksjon av x

Likninger som kan skrives slik kalles separabel

Vi tar den videre regning i små steg

...

$$\frac{1}{y}y' = -f(x)$$

Vi integrerer begge sider mhp. x

$$\int \frac{1}{y}y'dx = -\int f(x)dx.$$

Poenget er at vi med en gang kan subsitituere $y'dx = dy$

$$\int \frac{1}{y}y'dx = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C,$$

der C er en integrasjonskonstant. Derved

$$\ln|y| + C = -\int f(x)dx$$

...

Vi anvender eksponensialfunksjonen på begge sider

$$e^{\ln|y|+C} = e^{-\int f(x)dx},$$

bruker $e^{\ln|y|} = |y|$

$$|y| = e^{-C}e^{-\int f(x)dx}$$

og løser opp $|y|$ får vi

$$y = Ae^{-\int f(x)dx}, \qquad (*)$$

der $A = \pm e^{-C}$ er en reell konstant, som kan være både positiv og negativ. Uttrykk svarer til *K. 10.3.1* for $g \equiv 0$.

Initialbetingelse

Entydig skrevet form av (*) kan vi få ved å velge det ubestemte integralet

$$y = Ae^{-\int_a^x f(t)dt},$$

for en gitt a.

Initialbetingelsen $y(a) = y_a$ gir da

$$y = y_a e^{-\int_a^x f(t)dt}$$

Eksplisitt uttrykk dersom f kan integreres i formel.

Generell separabel likning *(K. kap. 10.4)*

Form

$$q(y)y' = p(x).$$

Integrasjon gir

$$\int q(y)y'dx \equiv \int q(y)dy = \int p(x)dx.$$

Dersom Q og P er antideriverte av hhv. q og p $\Rightarrow$

$$Q(y) = P(x) + C \qquad (\text{SI}),$$

der C er en integrasjonskonstant.

Initialbetingelse mm.

$$Q(y) = P(x) + C \qquad (\text{SI}),$$

Initialbetingelse $y(a) = y_a$

$Q(y_a) = P(a) + C \Rightarrow C = Q(y_a) - P(a)$

Løsning i eksplisitt formel forusetter

1. Q og P kan finnes
2. y må kunne løses fra (SI).

Trinn 1 og 2 kan alternativt utføres numerisk.
Ofte kan viktig informasjon finnes fra løsningen skrevet på den implistte formen (SI).

Eksempel C, løsning

Legeme i fall med luftmotstand ("fallskjermhopper")

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{C}{m}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

der y er posisjon. y selv inngår ikke, bytter avhengig variabel

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

der u er farten. Likning blir da

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = g - \frac{C}{m}u^2,$$

...

eller

$$\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{g - \frac{C}{m}u^2} = 1.$$

Separabel likning $q(y)y' = p(x)$ med $y \to u$, $x \to t$, $p \equiv 1$, $q = 1/(g - \frac{C}{m}u^2)$.
Denne gangen bytter vi *ikke* navn på variable!

Initialbetingelse
Ved t=0 starter vi fra ro

$$u(0) = 0.$$

Sammen med likningen ovenfor bestemmer denne betingelsen bevegelsen.

...

Integrasjon gir

$$\int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{g - \frac{C}{m}u^2}dt = \int dt = t + B,$$

der B er en integrasjonskonstant. Integrasjon av venstresiden gir

$$\begin{aligned}\int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{g - \frac{C}{m}u^2}dt &= \int \frac{du}{g - \frac{C}{m}u^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{gC}{m}}}\ln\left|\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{C}{m}}u}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{C}{m}}u}\right| + B_1,\end{aligned}$$

der B_1 kan settes lik 0. (utregning kommer senere))

...

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{gC}{m}}}\ln\left(\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{C}{m}}u}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{C}{m}}u}\right) = t + B, \qquad (**)$$

der vi har antatt $\sqrt{g} - \sqrt{C/m}u > 0$. Innsetting $u(0) = 0$ gir $B = 0$. Vi kan løse u fra (**). Multiplikasjon med $2\sqrt{gC}$, anvendelse av eksponentialfunksjonen på begge sider gir

$$\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{C}{m}}u}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{C}{m}}u} = e^{2\sqrt{\frac{gC}{m}}t}$$

Ganger vi opp med nevneren får vi en lineær likning i u som lett løses.

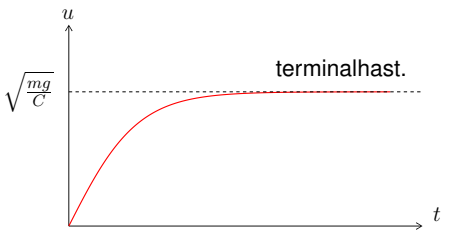
...

$$u = \sqrt{\frac{mg}{C}}\left(1 - \frac{2}{1 + e^{\sqrt{\frac{gC}{m}}t}}\right)$$

Vi ser at $u \to \sqrt{\frac{mg}{C}}$ og $u' \to 0$ når $t \to \infty$.

Sjekk $t \to \infty$
Likning $u' = g - \frac{C}{m}u^2$. Insetting $u' = 0$ gir $u = \sqrt{\frac{mg}{C}}$.
Fysisk beskrivelse: farten øker inntil luftmotstand balanserer tyngden.

...



Små t: tyngden dominerer $\Rightarrow$ u øker lineært.
Store t: u går mot terminalhastighet.
Vi kan finne $y(t)$ ved å integrere u.

Utregning av integral*

Delbrøkoppspalting

$$\int \frac{du}{g - \frac{C}{m}u^2} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\int\left(\frac{du}{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{C}{m}}u} + \frac{du}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{C}{m}}u}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{gC}{m}}}\left(\ln\left|\sqrt{g} + \sqrt{\frac{C}{m}}u\right| - \ln\left|\sqrt{g} - \sqrt{\frac{C}{m}}u\right|\right) + B_1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{gC}{m}}}\ln\left|\frac{\sqrt{g} + \sqrt{\frac{C}{m}}u}{\sqrt{g} - \sqrt{\frac{C}{m}}u}\right| + B_1,$$

Inhomogen, lineær likning av orden 1

Alternativ til bruk av integrerende faktor i *K. kap. 10.1*

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad \text{(IN)}$$

Knep: variasjon av parameteren
Vi skriver løsningen av (IN) $y(x) = v(x)u(x)$ der $u = e^{-\int f(x)dx}$ oppfyller den homogene delen $u' + f(x)u = 0$.
Innsetting i (IN)

$$uv' + u'v + fuv = g$$

Fordi u løser den homogene likningen kansellerer de siste to ledd på venstre side

$$v' = \frac{g}{u} \Rightarrow v = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx$$

...

For y kan vi da skrive *(K. 10.1.3)*

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C\right),$$

Alle løsninger må ha denne formen. Dersom (IN) skal løses med $y(c) = d$ utføres integraler fra c til x ($u = e^{-\int_c^x f(t)dt}$) og eneste mulige løsning er *(K. 10.3.1)*

$$y = e^{-\int_c^x f(t)dt}\left(\int_c^x g(t)e^{\int_c^t f(s)ds}dt + d\right),$$

Vist: $y' + f(x)y = g(x) \quad , x \in I, \quad y(c) = d$ har entydig løsning når f og g er integrerbare.

Andreordens, lineære likninger

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (H2)$$

Klassifisering: lineær, homogen, variable koeffisienter, orden 2.

Superposisjonering*(K. 10.5.1)*
Dersom y_1 og y_2 er løsninger av (H2) er $y = Cy_1 + Dy_2$, $C, D \in \mathbb{R}$, en løsning av (H2).

Når kan (H2) løses i formel?
Når koeffisientene er konstante og i noen få andre tilfeller

Variasjon av parameteren

Forenklet utgave av *-merket del av *K. kap. 10.6*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (INH2)$$

lineær, inhomogen, variable koeffisienter, orden 2.

Dersom vi kjenner en homogenløsning $u(x)$ kan vi sette inn $y = u(x)v(x)$.

$$v''u + 2v'u' + vu'' + pv'u + pvu' + quv = f.$$

Vi samler alle ledd som inneholder v

$$v''u + v'(2u' + pu) + v(u'' + pu' + qu) = f.$$

Ledd med v faller fordi u er en homogenløsning

...

$$v''u + v'(2u' + pu) = f.$$

u, p, f er kjente, v inngår ikke $\Rightarrow$ likning for $w = v'$

$$w' + (2\frac{u'}{u} + p)w = \frac{f}{u} \qquad (VL)$$

Løsning

- $f = 0$ (VL) er separabel. v gir alle andre homogenløsninger av (H2). Brukt i entydighetsargumenter *K. kap. 10.5*
- $f \neq 0$ (VL) er en inhomogen, lineær førsteordenslikning for $w = v'$. Vi kan bruke formel *K. 10.1.3* og finne løsningene til (INH2)