Oblig 2, MEK1100, høst 2005

Innleveringsfrist: fredag 11. november kl.14.30 på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etg, NHA)

1 Oppgaver

1. Undersøk om det finnes et hastighetspotensiale ϕ og en strømfunksjon ψ for følgende vektorfelt. Bestem funksjonene ϕ og ψ i de tilfellene de finnes. Plott vektorfeltene med Matlab.

a) $\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} - 2xy\boldsymbol{j}$

b) $\boldsymbol{v} = (x^2 + y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$

c) $\boldsymbol{v} = (y + xy - y^2)\boldsymbol{i} + (x - 2xy + \frac{1}{2}x^2)\boldsymbol{j}$

d) $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

2. Gitt et tre-dimensjonalt vektorfelt $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + (2y+z)\boldsymbol{j} + (z+x^2)\boldsymbol{k}$ i kartesiske koordinater xyz. Beregn vektorfluksen $Q = \int_\sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$ gjennom følgende flater σ hvor $\boldsymbol{n}$ er normalvektoren:

a) En kuleflate med sentrum i origo og radius a

b) Overflaten av en terning med sentrum i origo og sidekanter a

c) Hva blir resultatene dersom sentrum av kula og terningen flyttes til et annet punkt i feltet?

3. Gitt et to-dimensjonalt vektorfelt $\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$ i xy-planet.

a) Beregn sirkulasjonen av $\boldsymbol{F}$ omkring en lukket kurve λ gitt ved $x = a\cos t$ og $y = b\sin t$ hvor a, b er konstante og parameteren t ligger i følgende intervall $0 < t < 2\pi$.

b) Bruk Greens sats til å kontrollere resultatet.

c) Hvordan tolker du dette resultatet?

d) Plott vektorfeltet $\boldsymbol{F}$ for $x, y \in [-3, 3]$ i samme figur som λ for $(a, b) = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Hvilken relasjon har λ til $\boldsymbol{F}$ når $a = b$?

4. En strømfunksjon er gitt i kartesiske koordinater xy ved

$$\psi(x, y) = A\left[\frac{y}{2a} + \ln\left(x^2 + (y-a)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \ln\left(x^2 + (y+a)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

a) Gjør rede for hvilket felt hvert av leddene i uttrykket ovenfor representerer (kort forklaring).

b) Hvorfor eksisterer det et hastighetspotensiale for dette feltet?

c) Sett $\frac{A}{2a} = U$ og finn strømkomponentene u og v henholdsvis i x- og y-retning. Hva blir strømhastigheten i origo og for punkter $|x| \gg a$ og $|y| \gg a$? Vis at x-aksen er en strømlinje. Finn noen andre punkter på strømlinjen $\psi = 0$.

d) Sett $A = a = 1$ og bruk Matlab til å regne ut verdien av ψ i området $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$ med intervaller $\Delta x = \Delta y = 0.1$. Bruk resultatet til å plotte konturlinjer for

- $\psi_0 = \{-2.0, -1.9, -1.8, \ldots, 1.8, 1.9, 2.0\}$ i én figur uten tallverdiene markert, og
- $\psi_0 = \{-2.0, -1.6, -1.2, \ldots, 1.2, 1.6, 2.0\}$ i én figur med tallverdiene markert.

e) Prøv å gi en fysikalsk tolkning av dette feltet (kort forklaring).