Oblig 1, MEK1100, våren 2006
Frist: Fredag 3. mars kl. 14:30

1 Gradient, divergens og virvling

a) Skisser endel vektorer for vektorfeltet $\boldsymbol{F}(x, y)$:

1. $\boldsymbol{F}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$
2. $\boldsymbol{F}(x, y) = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$
3. $\boldsymbol{F}(x, y) = -x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$

b) Finn gradienten ∇f for skalarfeltet:

1. $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2z$
2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3$

c) Finn divergens og virvling (curl) for vektorfeltene:

1. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{i} - 2xy\boldsymbol{j} + yz^2\boldsymbol{k}$
2. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$

2 To-dimensjonalt strømfelt

Gitt et to-dimensjonalt strømfelt $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$ i xy-planet hvor $u = A\cos kx \sin ky$, $v = -A\sin kx \cos ky$ og A og k er positive konstanter. Området er begrenset av $-\frac{\pi}{2k} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2k}$ og $-\frac{\pi}{2k} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2k}$.

a) Beregn divergens og virvling til feltet.

b) Tegn opp strømvektorer langs x- og y-aksene og langs områdets begrensningslinjer. Skisser på grunnlag av dette strømlinjene.

c) Hvorfor eksisterer det en strømfunsjon ψ i dette tilfellet? Vis at $\psi = \frac{A}{k}\cos kx \cos ky$.

d) Beregn gradientvektoren $\nabla\psi$ og vis at den står normalt på strømvektoren $\boldsymbol{v}$.

e) Anvend en andreordens Taylorutvikling av funksjonene $\cos kx$ og $\cos ky$ og finn likningen for strømlinjene nær origo.

3 Matlab

Når denne oppgaven skal leveres må både koden (i form av m-filer) og plott legges ved. Kommenter resultatene der det er nødvendig.

3.1

Et terrengområde er gitt ved formelen $z = cxy\exp(-x^2 - y^2)$.

a) Lag et grid i xy-retning der både x og y skal gå fra -2 til 2. Velg selv et passende intervall. For å bestemme konstanten c skal vi gjøre følgende: Beregn først z med $c = 1$. Bruk kommandoene `min` og `max` til å finne hvilke verdier z varierer mellom. Bruk resultatet til å skalere z (ved hjelp av c) slik at z varierer mellom -25 og 25. Lag et overflateplott av terrengmodellen.

b) Lag en ny figur med konturlinjene til z over det samme xy-intervallet. La Matlab angi verdiene av konturlinjene i figuren.

c) Isolér noen ikke-negative og noen ikke-positive linjer i hvert sitt plott.

d) Beregn gradientvektorfeltet til z og plott dette i samme figur som konturlinjene fra oppgave b).

3.2

Gitt strømfunksjonen $\psi(x, y) = \sin x + \frac{1}{2}y^2$.

a) Hvilket strømfelt $\boldsymbol{v} = u(x, y)\boldsymbol{i} + v(x, y)\boldsymbol{j}$ har ψ som sin strømfunksjon? (Regn dette ut for hånd, ikke ved hjelp av Matlab.)

b) Plott strømfeltet for $x, y \in [-5, 5]$. Velg selv et passende intervall.

c) Plott strømlinjene $\psi_0 = -0.9, -0.5, 0, 1, 2, 4, 6, 8, 10$ i samme figur som strømfeltet fra oppgave b).