2.8 Tillegg; Asymptotisk uttrykk for Fourier integralet.

2.8.1 Asymptotisk utvikling av bølgefront

Antar vi uendelig dyp vil vi ikke ha noen klar begrensning på bølgetoget som genereres fra en initiell forstyrrelse, men amplituden vil avta gradvis i tråd med fordelingen av energi i spekteret. Tar vi i betraktning at dypet er endelig har vi en begrensning på hastigheten av tyngdebølger og vi må forvente at det finnes en klart definert front av bølgetoget. Dette skal vi studere nærme nedenfor.

Fouriertransform anvendt på initialverdiproblemet gir inversjonsintegralet

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\Re\int_0^\infty \tilde{\eta}_0 \mathrm{e}^{\imath\chi}\mathrm{d}k; \quad \chi \equiv kx - \omega(k)t \tag{1}$$

for den delen av bølgetoget som forplanter seg i positiv x-retning. For store x og t vil det dominerende bidraget komme fra det stasjonære punktet i faseplanet, k_s, der

$$\frac{\mathrm{d}\chi(k_s)}{\mathrm{d}k} = 0$$

som tilsvarer

$$c_g(k_s) = \frac{x}{t} \tag{2}$$

Dersom vi begrenser oss til tyngdebølger er gruppehastigheten begrenset av $c_0 = \sqrt{gH}$. Vi finner derfor bare stasjonære punkter for $\frac{x}{t} \leq c_0$. For større verdier for x/t er det rimelig å anta at vi ikke har noen bølge – den har ikke rukket å komme dit. For grensen $\frac{x}{t} = c_0$ finner vi et stajonært punkt for $k_s = 0$. Dette er et andre ordens stasjonært punkt i den forstand at også $\chi''(k_s) = 0$. Tar vi med tredje leddet i Taylorrekka får vi

$$\chi \approx kx - c_0\left(k - \frac{H^2}{6}k^3\right)t \tag{3}$$

og integralet

$$\eta(x,t) \approx \frac{1}{2\pi}\Re\int_0^\infty \tilde{\eta}_0(0)\mathrm{e}^{\imath\left(kx-(c_0k-\frac{H^2}{6}c_0k^3)t\right)}\mathrm{d}k \tag{4}$$

En triviell substitusjon uttrykker dette integralet ved hjelp av

$$I(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + zs\right)\mathrm{d}s \tag{5}$$

som er en integralformel for Airy funksjonen Ai, som er en løsning av Airy's likning[1]:

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2} - zF = 0 \tag{6}$$

Denne spiller en stor rolle i anvendt matematikk fordi løsningene har en eksponensiell variasjon for $z > 0$ og en trigonometrisk (svingende) for $z < 0$. Derfor dukker den ofte opp i lokale løsninger

[1] Dette verifiseres lett ved innsetting av integralformen i likningen

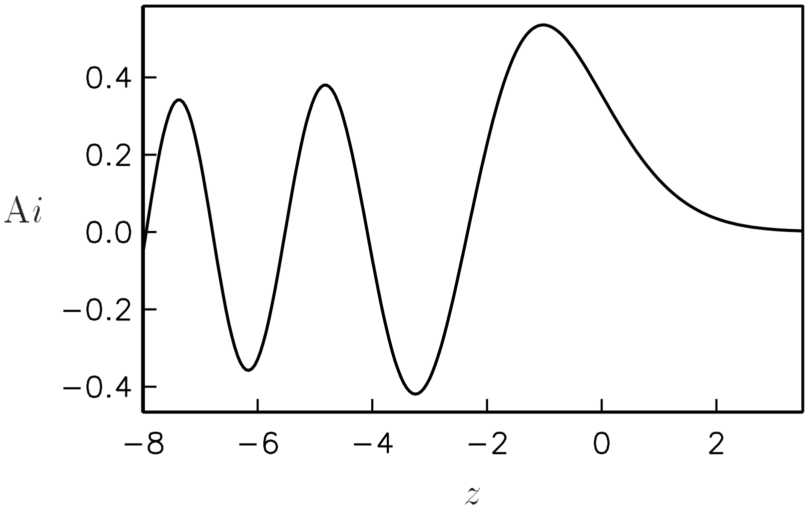

Figure 1: Airy funksjonen.

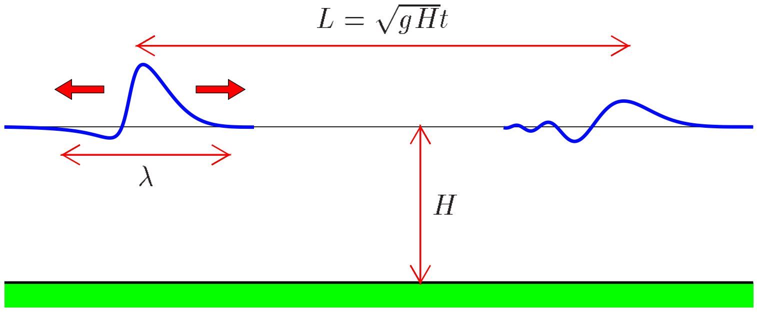

Figure 2: Definisjons-skisse av initialbetingelse og bølgespredning.

i ytterkanten av bølgemønstre. Airy funksjonen er den løsningen av (6) som er eksponensielt avtagende når $z \to \infty$ og oppfyller normaliseringsbetingelsen $\int_{-\infty}^{\infty} F \mathrm{d}z = 1$. Airy funksjonen er framstilt i figur 1.

Nær $x = c_0 t$ får vi nå den asymtotiske tilnærmelsen:

$$\eta \sim \frac{\frac{1}{2}V}{(\frac{1}{2}c_0 H^2 t)^{\frac{1}{3}}} \mathrm{A}i \left(\frac{x - c_0 t}{(\frac{1}{2}c_0 H^2 t)^{\frac{1}{3}}} \right) \tag{7}$$

der $V = \tilde{\eta}(0)$ er integralet (volumet) av $\eta(x, 0)$.

Når $\frac{x - c_0 t}{(\frac{1}{2}c_0 H^2 t)^{\frac{1}{3}}} \to -\infty$ kan vi bruke et asymptotisk utrykk for $\mathrm{A}i$. Dette kan matches asymptotisk med den vanlige stasjonær-fase tilnærmelsen for $x \to c_0 t^-$. Vi hopper over detaljene her, men viser i stedet et eksempel på spredning av tsunami (figur 2). Ulike matematiske løsninger er framstilt i figurene 3 og 4. Etter at langbølgeteori er gjennomgått er det en god ide å se nærmere på forholdet mellom resultatene.

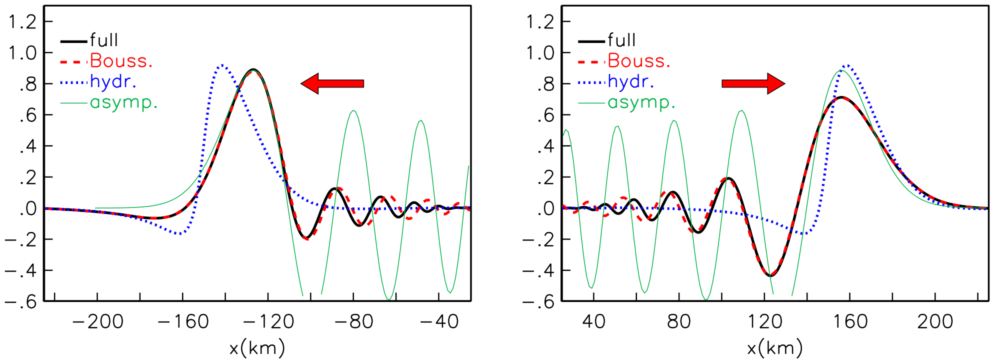

Figure 3: Spredning av jordskjelvgenerert overflatebølge (tsunami). Overflatehevningen (meter) er tegnet etter t = 11.3 min som tilsvarer en gangvei $L = c_0 t = 150\,\mathrm{k}m$ når $H = 5\mathrm{k}m$. Kurven merket "full" er en nøyaktig numerisk løsning av Laplace likning med randbetingelser, "Bouss" er løsningen av Boussinesq likningene, "hydr." av gruntvannslikningene, mens "asymp" er løsningen gitt ved (7). Vi merker oss at "hydr." resultatet har samme form som initialbetingelsen, men halvert amplitude.

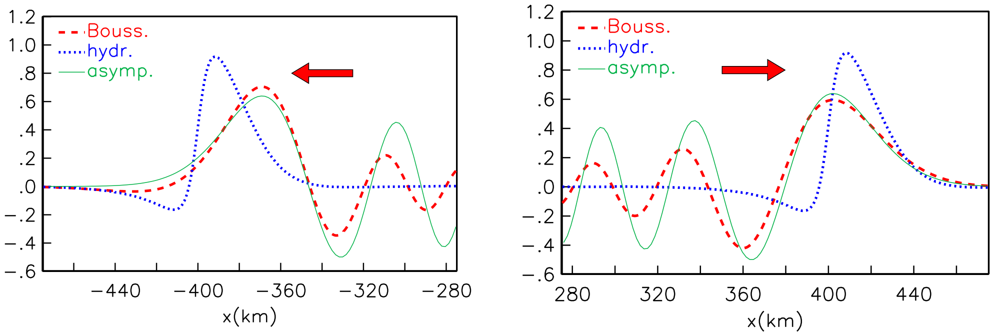

Figure 4: Overflatehevningen (m) etter $t = 30$ min, $L = 400\mathrm{k}m$. Vi merker oss at de forskjellen mellom de numeriske resultatene og asymptoten er redusert i forhold til figur 3.