2.9 Tillegg: Formell utledning av Boussinesq og KdV-likninger.

Avsnittene nedenfor erstatter dels utledning av Boussinesq likninger, s. 48-49 i kompendiet og inneholder dels ekstra stoff.

2.9.1 Utledning av Boussinesq likningene.

Vi antar todimensjonal bevegelse med x-aksen horisontalt og z-aksen vertikalt. Bunnen (likevektsdypet) er variabel og beskrives ved $z^\star = -h^\star(x^\star)$, der $\star$ angir størrelser med dimensjon. Vi gjør likningene dimensjonsløse i tråd med følgende punkter:

- Et typisk dyp, H, brukes for skalering av "vertikale" størrelser som z, vertikalhastighet og overflatehevning.
- En typisk bølgelengde, ℓ, brukes for skalering av horisontale størrelser.
- Feltstørrelser skaleres i tillegg med en faktor, α, som er et mål for amplituden.

En linearisering forutsetter nå at α er liten, mens en langbølgeutvikling bygger på at

$$\epsilon \equiv \frac{H^2}{\ell^2} \tag{1}$$

er liten. Vi gjennomfører nedenfor en formell utvikling i disse parameterene. Det er verdt å merke seg at vi ikke innfører formelle pertubasjonsrekker for de ukjente, men i stedet iterer på likningene.

Dimensjonering gjøres etter:

$$\begin{array}{lll} z^\star = Hz & x^\star = \ell x & t^\star = \ell(gH)^{-\frac{1}{2}}t \\ h^\star = Hh(x) & \eta^\star = \alpha H\eta & u^\star = \alpha(gH)^{\frac{1}{2}}u \\ w^\star = \epsilon^{\frac{1}{2}}\alpha(gH)^{\frac{1}{2}}w & p^\star = \rho gHp & \end{array} \tag{2}$$

Randbetingelsene ved $z = \alpha\eta$ kan nå skrives:

$$p = 0 \qquad \eta_t + \alpha u\eta_x = w \tag{3}$$

Ved bunnen har vi betingelsen om null væske-gjennomstrømning, som gir

$$w = -h_x u \tag{4}$$

I væskerommet har vi Eulers bevegelseslikninger:

$$u_t + \alpha uu_x + \alpha wu_z = -\alpha^{-1}p_x \tag{5}$$

$$\epsilon(w_t + \alpha uw_x + \alpha ww_z) = -\alpha^{-1}(p_z + 1) \tag{6}$$

og kontinuitetslikningen:

$$u_x + w_z = 0 \tag{7}$$

Elimineres alle ledd av orden ϵ får vi den hydrostatiske beskrivelsen. Til orden ϵ^0 gir (6) en trykkfordeling:

$$p = \alpha\eta - z + O(\alpha\epsilon), \tag{8}$$

som impliserer at $p_x = \alpha\eta_x + O(\alpha\epsilon)$, dvs. at den horisontale trykkgradienten er uavhengig av z til orden ϵ^0. Av dette følger at alle partikler i et snitt x=const. får samme horisontale akselerasjon. Har de da samme horisontalhastighet til orden ϵ^0 ved ett tidspunkt gjelder dette til alle tider. Dette er for eksempel tilfelle der hvor væsken initielt er i ro. Vi kan nå skrive:

$$u_z = O(\epsilon) \tag{9}$$

eller $u \approx u(x,t)$. Dette kan også vises ved å benytte krav om virvelfrihet. (5) gir da:

$$u_t + \alpha u u_x = -\eta_x + O(\epsilon). \tag{10}$$

Vi vil nå utlede en høyere ordens likning ved å anta at både ϵ og α er små. Dette betyr at vi beholder ledd av orden α og ϵ, men at ledd inneholdende produkter av disse eller ϵ^2 sløyfes. Vi starter med å definere et vertikal-middel:

$$\overline{u} = (h + \alpha\eta)^{-1} \int_{-h}^{\alpha\eta} u dz \tag{11}$$

En følge av (9) er at $\overline{u}(x,t) - u(x,z,t) = O(\epsilon)$. En dybdemidlet kontinuitetslikning kan nå skrives:

$$\eta_t = -\{(h + \alpha\eta)\overline{u}\}_x \tag{12}$$

Denne er eksakt og er utledet i kompendiet ved en direkte volum-betraktning.

En korreksjon på hydrostatisk trykk kan finnes fra (6). Vi kan gjøre feil av orden ϵ og α inne i parentesen på venstre side uten at trykket får relativ feil av lavere orden enn $\alpha\epsilon$ og ϵ^2. Først må vi finne et uttrykk for w. Fra (3), (9) og (7) følger:

$$w = \eta_t - z\overline{u}_x + O(\alpha, \epsilon) \tag{13}$$

Settes dette inn i (6) får vi:

$$p = \alpha\eta - z - \epsilon\alpha(z\eta_{tt} - \frac{1}{2}z^2\overline{u}_{xt}) + O(\alpha\epsilon^2, \alpha^2\epsilon) \tag{14}$$

Fra (12) har vi $\eta_{tt} = -(h\overline{u})_{xt} + O(\alpha)$ som kan brukes til å skrive om utrykket for p. Det neste steget er å midle den horisontale komponenten av bevegelseslikningen,(5), over væskedypet. Midling av første ledd på venstre side gir:

$$\overline{(u_t)} = (h + \alpha\eta)^{-1} \int_{-h}^{\alpha\eta} u_t dz = \overline{u}_t + \alpha(h + \alpha\eta)^{-1}(\overline{u} - u|_{z=\alpha\eta})\eta_t \tag{15}$$

Likning (9) gir nå at det siste leddet er av orden $\alpha\epsilon$ som sløyfes. For neste ledd i (5) får vi tilsvarende:

$$\overline{(\frac{1}{2}\alpha(u^2)_x)} = \alpha\frac{1}{2}\left(\overline{(u^2)}\right)_x + O(\alpha^2\epsilon) \tag{16}$$

En konsekvens av (9) er at vi kan skrive $u = \overline{u} + \epsilon u_1$ der u_1 er av orden 1, men er null i middel. En enkel regning gir nå:

$$\frac{1}{2}\left(\overline{(u^2)}\right)_x = \overline{(\overline{u}^2 + 2\epsilon\overline{u}u_1)}_x + O(\epsilon^2) = \overline{u}\,\overline{u}_x + O(\epsilon)^2 \tag{17}$$

Det siste bidraget til akselerasjonen i (5) kan sløyfes umiddelbart som følge av (9). Setter vi så inn p fra (14) på venstresiden og midler denne får vi:

$$\overline{u}_t + \alpha \overline{u}\,\overline{u}_x = -\eta_x + \epsilon\{\frac{1}{2}h(h\overline{u}_t)_{xx} - \frac{1}{6}h^2\overline{u}_{xxt}\} + O(\epsilon^2, \alpha\epsilon) \tag{18}$$

Denne sammen med (12) utgjør et sett av to likninger i x og t for de to ukjente η og $\overline{u}$. Likningene kan bringes på mange former ved omskrivninger av høyere ordens ledd eller ved feks. å innføre $U = (h + \alpha\eta)\overline{u}$ som ukjent slik som i kompendiet. En viktig forskjell fra kompendiet er at (18) er gyldig for variabelt dyp. Det prinsipielt nye ved (18) i forhold til hydrostatisk teori er at det nye leddet på høyresiden gir dispersjon.

2.9.2 Utledning av KdV-likningen.

Desom vi har bølger som forplanter seg i bare en retning over konstant dyp kan Boussinesq-likningene erstattes av en den enklere KdV (Korteweg–de Vries) likningen. Denne kan utledes på flere ulike vis, hvorav vi nevner:

1. En finner et ledende ikke-lineært ledd fra hydrostatisk ikke-lineær teori og et ledende dispersjonsledd fra den lineære dispersjonsrelasjonen. Disse kombineres så direkte.
2. En bytter koordinatsystem slik at det beveger seg med lineær gruntvanns-hastighet. For ensrettede bølger vil alle størrelser endre seg langsomt i tiden når de sees i dette systemet.
3. En kan finne korreksjoner på likningene for Riemann-invariantene innenfor rammen av Boussinesq-likningene.

Det er framgangsmåte 1 som er fulgt i kompendiet. Denne kan nok oppfattes som vel lettvint, derfor skal vi her gi en formell utledning av typen 2.

Vi skal gjøre to ting: beskrive det hele med bare η som ukjent og redusere likningenes orden. Først byttes koordinater etter:

$$\xi = x - t \qquad \tau = \epsilon t \tag{19}$$

Bølgen forplanter seg altså mot økende x og den lille faktoren ϵ foran t angir at tidsvariasjonen i det nye koordinatsystemet er langsom. Egentlig kunne vi like gjerne valgt α som ϵ for reskalering av tiden og en bør tenke seg at disse parametrene er av samme størrelsesorden. Koordinatskifte i kontinuitetslikningen, (12), gir:

$$\epsilon\eta_\tau - \eta_\xi = -(1 + \alpha\eta)\overline{u}_\xi - \alpha\overline{u}\eta_\xi \tag{20}$$

Der vi altså har satt $h \equiv 1$. Til ledende orden gir likningen ovenfor: $\eta_\xi = \overline{u}_\xi + O(\alpha, \epsilon)$. Dersom vi har at η og $\overline{u}$ er like ett eller annet sted i mediet er de alltid like til denne orden. Dette er tilfelle dersom bølgen feks. har endelig utstrekning. Likningen ovenfor kan derfor omskrives innenfor gjeldende nøyaktighet:

$$\epsilon\eta_\tau - \eta_\xi = -\overline{u}_\xi - 2\alpha\eta\eta_\xi + O(\epsilon^2, \alpha\epsilon) \tag{21}$$

Tilsvarende kan mesteparten av $\overline{u}$'s forekomster i den transformerte bevegelseslikningen elimineres. Innsetting i (18), etterfulgt av omskrivninger, gir:

$$\overline{u}_\xi = \eta_\xi + \epsilon\eta_\tau + \alpha\eta\eta_\xi + \frac{1}{3}\epsilon\eta_{\xi\xi\xi} + O(\epsilon^2, \alpha\epsilon) \tag{22}$$

Ved innsetting i (21) og ordning framkommer så en variant av KdV likningen:

$$\epsilon\eta_\tau + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_\xi + \frac{1}{6}\epsilon\eta_{\xi\xi\xi} = O(\epsilon^2, \alpha\epsilon) \tag{23}$$

Vi merker oss at $O(1)$ leddene kansellerte slik at denne likningen direkte uttrykker regnskapet mellom langsom tidsendring, ikke-lineæritet og dispersjon. En bør også observere at ingen kryssderivasjon var nødvendig for å eliminere $\overline{u}$ slik at en lav orden på likningene oppnås automatisk. Innføres koordinatene x og t i (23) finner vi:

$$\eta_t + (1 + \frac{3}{2}\alpha\eta)\eta_x + \frac{1}{6}\epsilon\eta_{xxx} = O(\epsilon^2, \alpha\epsilon), \tag{24}$$

som svarer til formen gjengitt i kompendiet. Denne kan omskrives videre på ulike vis. Feks. kan vi benytte ledende ordens balanse i (24), $\eta_t + \eta_x = O(\epsilon, \alpha)$, til å omskrive dispersonsleddet:

$$\eta_t + (1 + \frac{3}{2}\alpha\eta)\eta_x - \frac{1}{6}\epsilon\eta_{xxt} = O(\epsilon^2, \alpha\epsilon), \tag{25}$$

som er gunstigere å løse numerisk. De ulike varianter av KdV likninger vil naturligvis ikke gi identiske svar, men svar som er konsistente innenfor de felles feilgrensene.

Det er mulig å generalisere KdV- likningen slik at en langsomt-varierende bunn ($h_x = O(\epsilon, \alpha)$) etc. kan inkluderes, men vi skal ikke gjøre dette her.