2 Tillegg; Energi i Overflatebølger.

Kapitlene 2.4.1-2.4.6 nedenfor erstatter kapittel 2.4 i kompendiet.

2.4 Tetthet og fluks av mekanisk energi i overflatebølger.

I dette avsnittet skal vi diskutere midlere energi–tettheter og flukser (transporter) i to-dimensjonale periodiske bølger som beskrevet i foregående avsnitt. Vi vil utlede resultatene på to ulike vis. Først vil vi sette opp og beregne direkte alle ulike bidrag til tettheter og flukser som deretter adderes. I neste omgang vil vi ta utgangspunkt i bevegelses- og kontinuitetslikning og utlede en generell konserveringslikning for energien.

For å forkorte uttrykkene vil vi nedenfor ofte betegne partielt deriverte vha. indekser. For eksempel vil $\partial\eta/\partial t$ kunne skrives η_t. Siden vi regner todimensjonalt er det generelt underforstått at alle tettheter og flukser er regnet pr. lengde normalt bevegelsesplanet.

2.4.1 Konserveringslover.

Før vi starter studiet av bølge-energi vil vi gi en kort generell diskusjon av konserveringslover. Vi begrenser oss til konservering av skalare størrelser og betegner tettheten av den konserverte størrelsen med ε. Transporten av størrelsen gjennom et flate-element med areal $\mathrm{d}A$ og utadrettet normal $\vec{n}$ kan da skrives $\vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A$ der *flukstettheten* $\vec{q}$ avhenger av mediet og feltstørrelsene. Konserveringsloven på *integrert* form, for et volum Ω, kan da skrives:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\varepsilon\mathrm{d}\Omega = -\int\limits_{\Sigma}\vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A \tag{1}$$

der Σ er flaten som omslutter Ω. Lar vi Ω krympe til et punkt og benytter Gauss sats får vi konserveringsloven på *differensialform*:

$$\varepsilon_t = -\nabla\cdot\vec{q} \tag{2}$$

Ofte utledes likninger fra fysiske prinsipper på denne måten. I avsnitt 2.4.5 skal vi gå motsatt vei og utlede konserveringsloven fra de hydrodynamiske grunnlikninger. Først, i avsnitt 2.4.2, vil vi sette opp utrykk for flukser og tettheter direkte fra generell kunnskap om kinetisk og potensiell energi etc. En skal likevel ha klart for seg at de utregnede størrelsene inngår i en konserveringlov som gitt ovenfor.

2.4.2 Direkte utregning av tettheter.

Løsningen gitt i (2-14) er lineær, det vil si at den er gyldig bare til ledende orden i amplituden (a). Følgelig vil vi bare kunne beregne tilnærmede energitettheter. Det viser seg at lineær bølgeteori gir integrerte energier som er korrekte tom. kvadratiske ledd i amplituden.

Vi har tre former for mekanisk energi som listes med tilhørende betegnelse for tetthet midlet over en bølgelengde:

(i) Kinetisk energi, E_k.

(ii) Potensiell energi i tyngdefeltet, E_p^t.

(iii) Potensiell kappilar-energi, E_p^k.

(i):
Det fulle utrykket for midlere kinetisk energi lyder:

$$E_k = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^{x_1+\lambda} \int_{-H}^{\eta} \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

der resultatet er uavhengig av x_1 pga. periodisiteten. Integralet i z kan deles i ett integral fra bunnen til $z = 0$ og ett fra $z = 0$ til den fri overflate. Siden integranden er kvadratisk i amplituden vil det siste gi et kubisk bidrag ($O(a^3)$) som kan sløyfes. Innsetting av den lineære løsningen fulgt av enkel regning vil nå gi oss:

$$E_k = \frac{1}{4} \rho g a^2 (1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}) + O(a^3) \tag{4}$$

(ii):
Som i tidligere avsnitt definerer vi nullnivå for tyngdepotensialet i $z = 0$. Vi får da følgende uttrykk for integrert potensiell energi:

$$\int_{x_1}^{x_1+\lambda} \int_{-H}^{\eta} \rho g z \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \rho g \lambda H^2 + \int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \mathrm{d}x \tag{5}$$

Det første leddet på høyre side gir energien ved likevekt, mens det andre gir en økning knyttet til bølgebevegelsen. Dette gir:

$$E_p^t = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \rho g a^2 + O(a^3) \tag{6}$$

(iii):
Dersom overflaten strekkes utføres et arbeid mot overflatespenningen som går til økning av den potensielle kappilar-energien. Dette kan illustreres ved et enkelt eksempel: vi har en plan rektangulær overflate-hinne med bredde b og lengde ℓ som forlenges med $\mathrm{d}\ell$. Arbeidet som utføres er da $\sigma b \mathrm{d}\ell$ eller $\sigma \mathrm{d}A$ der A har tolkning som areal. Den potensielle energien blir da $\sigma A +$konst.. Dette er et generelt resultat som utledes rigorøst under etableringen av energilikningen i kommende avsnitt. Vi kan nå sette opp et integral for potensiell kapillar-energi:

$$\int_{x_1}^{x_1+\lambda} \sigma \sqrt{1 + \eta_x^2} \mathrm{d}x = \sigma \lambda + \int_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2} \sigma \eta_x^2 \mathrm{d}x + O(a^4) \tag{7}$$

Det første leddet på høyre side svarer igjen til likevektsbidraget og vi setter:

$$E_p^k = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{x_1}^{x_1+\lambda} \frac{1}{2}\sigma\eta_x^2 \mathrm{d}x + O(a^4) = \frac{1}{4}\sigma k^2 a^2 + O(a^3) \tag{8}$$

Summerer vi bidragene til den potensielle energien følger nå:

$$E_p^t + E_p^k = \frac{1}{4}\rho g a^2 (1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}) + O(a^3) = E_k + O(a^3) \tag{9}$$

Til den orden vi har regnet er altså de midlere tettheter av potensiell og kinetisk energi like. *Dette er et resultat av generell gyldighet for lineær bølgebevegelse og betegnes energiekvipartisjons-prinsippet.*

Av siste likning i (2-30) fremgår det at for bølgelengder $\lambda >> \lambda_m$, hvor λ_m er definert i (2-17), er energitettheten på grunn av overflatespenningen ubetydelig i forhold til energitettheten på grunn av tyngden. Vi har derfor at for $\lambda >> \lambda_m$

$$E = \frac{1}{2}\rho g a^2 \tag{10}$$

som er den midlere mekaniske energitetthet for tyngdebølger. For bølge-lengden $\lambda << \lambda_m$ er energitettheten på grunn av tyngden ubetydelig, og vi får at den mekaniske energitettheten for kapillarbølger er

$$E = \frac{1}{2}\sigma k^2 a^2 \tag{11}$$

2.4.3 Direkte utregning av flukser.

Vi betrakter nå energitransporten (fluksen) gjennom et snitt $x = x_0$ midlet over en periode. Fluksen regnes positiv med økende x. Det er to prinsippielt ulike bidrag til denne transporten: energi fraktes med væsken som strømmer (advekteres) gjennom snittet og energi overføres via arbeid som trykk og overflatespenning utfører på snittflaten.

Det er hensiktsmessig å behandle transport av potensiell energi i tyngdefeltet, kinetisk energi og effekten av trykkets arbeid samlet. Transport pr. tidsenhet av kinetisk energi er integralet av $\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 u$ over hele væskehøyden, for potensiell energi får vi tilsvarende integralet av $\rho g z u$ mens effekten av trykkets finnes ved å integrere pu. Vi får da det summerte bidraget:

$$q_1 = \int\limits_{-H}^{\eta} (\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho g z + p) u \mathrm{d}z \tag{12}$$

Dette uttrykket forenkler seg dramatisk når vi benytter Eulers trykklikning (2-7) med $p_a = 0$. Vi får:

$$f_1 = -\int\limits_{-H}^{\eta} \rho\phi_t\phi_x \mathrm{d}z = -\int\limits_{-H}^{0} \rho\phi_t\phi_x \mathrm{d}z + O(a^3) \tag{13}$$

Den midlere fluksen regnes så ut ved:

$$F_1 = -\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}\int_{-H}^{0} \rho\phi_t\phi_x \mathrm{d}z\mathrm{d}t + O(a^3) \tag{14}$$

Nå gjenstår transport pga. kappilar-spenningene. Effekten av overflatespenningens arbeid i snittet er $-\sigma\vec{s}\cdot\vec{v}$ der $\vec{s}$ er enhetstangenten (i positiv x-retning) til overflaten. Den væsken som strømmer inn i tidsintervall $\mathrm{d}t$ har en overflate med lengde $\mathrm{d}s = \sqrt{1+\eta_x^2}u\mathrm{d}t$. Transporten av potensiell energi er da $\sigma\mathrm{d}s$. Legger vi sammen og setter inn for $\vec{s}$ får vi som transport pr. tid:

$$f_2 = \sigma[(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}}u - (1+\eta_x^2)^{-\frac{1}{2}}(u+\eta_x w)]_{z=\eta} = -\sigma\eta_x\phi_z|_{z=0} + O(a^3) \tag{15}$$

Midler vi f_2 over en periode og regner sammen $F = F_1 + F_2$ får vi et resultat som hensiktsmessig kan skrives:

$$F = c_g E \tag{16}$$

der

$$c_g = \frac{c}{2}[\frac{1+\frac{3\sigma k^2}{\rho g}}{1+\frac{\sigma k^2}{\rho g}} + \frac{2kH}{\mathrm{Sin}2kH}] \tag{17}$$

Størrelsen c_g måler altså forplantningshastigheten for energi og betegnes som *gruppehastighet*. Ved derivasjon kan vi vise at $c_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$. Vi skal behandle c_g videre i senere avsnitt og nøyer oss nå med å bemerke at (16) er en *generell* sats for linær bølgebevegelse.

For tyngdebølger på dypt vann ($kH >> 1$) er energifluksen pr. lengdeenhet langs bølgeoppene

$$F = \frac{1}{4}\rho g a^2 \tag{18}$$

Tabellen nedenfor viser fasehastighet, periode og energifluks for tyngdebølger med bølgelengde fra 1-150 m og med amplitude 0.1 m. Vanndypet er forutsatt å være mye større enn bølgelengden slik at vi kan regne som om det er uendelig dypt vann.

λ(m)	c(m/s)	T(s)	F(watt/m)
5	2.79	1.79	69
10	3.95	2.53	97
25	6.25	4.00	153
50	8.84	5.66	217
75	10.82	6.93	265
100	12.50	8.00	307
150	15.30	9.80	375

Tabell 1.

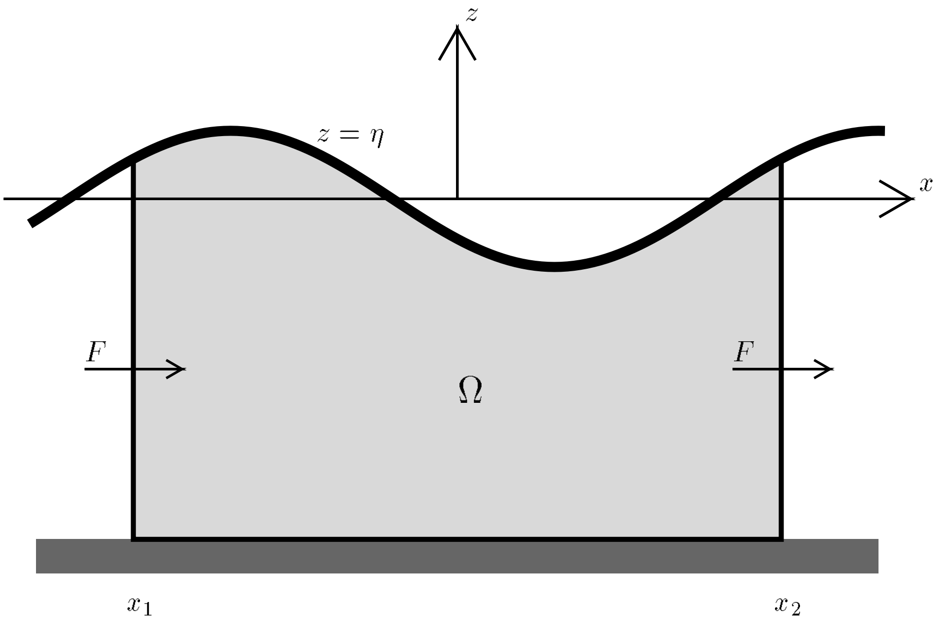

Figure 1: Kontrollvolum for energibetraktninger.

2.4.4 Grunnlikninger, mål.

Vi har et væskeområde, Ω, som er begrenset av en horisontal bunn ved $z = -H$, av en fri overflate ved $z = \eta(x,t)$ og vertikale snitt ved $x = x_1$ og $x = x_2$. En definisjonsskisse er gitt i figuren.

For dette området skal vi sette opp en integrert energilikning på formen[1]:

$$\frac{d}{dt}(e_p + e_k + e_p^{(k)}) = F|_{x=x_1} - F|_{x=x_2} \tag{19}$$

der e_p, e_k og $e_p^{(k)}$ er hhv. potensiell energi i tyngdefeltet, kinetisk energi og potensiell energi pga. overflatespenning. Alle er summert over væskeområdet. De to første bør være velkjente og den siste viser seg å være lik produktet av overflatespenningen σ og lengden av den fri overflaten. Fluksen, F, er sammensatt av transport av de tre energityper med væskehastigheten, effekt av trykkarbeid og effekt av arbeid mot overflatespenningen. For å relatere endringer av de integrerte størrelsene til endringer

[1] Inkluderes viskøse effekter vil det i tillegg opptre et dissipasjonsledd. En ikke–konservativ volumkraft vil også gi opphav til et kildeledd i form av et integral over Ω

av feltvariable trenger vi et spesialtilfelle av Leibniz' regel:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} G d\Omega = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial t} d\Omega + \int\limits_{x_1}^{x_2} G|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} dx \tag{20}$$

der det siste leddet skriver seg fra tidsvariasjonen av den fri overflaten. En kan merke seg at dette leddet alene gir bidraget til endring av e_p, fordi tyngdepotensialet er tidsuavhengig.

Vi setter nå opp likningene som styrer bevegelsen og som vi vil utlede energilikningen (19) fra. Noen er gitt tidligere men gjentas her for oversiktens skyld. Først har vi bevegelseslikningen for en ideell væske:

$$\vec{v}_t + \nabla(\frac{1}{2}\vec{v}^2) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi \tag{21}$$

der indekser angir partiell derivasjon og vi har brukt virvelfriheten til å omskrive det konvektive leddet. I stedet for eksplisitt å innføre tyngden opererer vi med et generelt kraftpotensial Φ. Integrasjon av (21) gir Eulers trykklikning:

$$\phi_t + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi = C(t) \tag{22}$$

der høyresiden er konstant i rommet og må bestemmes i sammenheng med valg av vilkårlige konstanter i ϕ og Φ. Væsken er inkompressibel og kontinuitetslikningen blir da:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{23}$$

Ved bunnen har vi betingelsen :

$$w = 0 \tag{24}$$

mens vi ved den fri overflaten har dynamisk betingelse:

$$p\vec{n} + \sigma\frac{\partial \vec{s}}{\partial s} = 0 \tag{25}$$

der s er buelengde og $\vec{s}$ og $\vec{n}$ er hhv. enhetstangent og enhetsnormal til overflaten. Alternativt kan betingelsen skrives:

$$p + \frac{\sigma\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \tag{26}$$

I tillegg har vi den kinematiske overflatebetingelsen:

$$\eta_t + u\eta_x = w \tag{27}$$

2.4.5 Utledning av generell energilikning

Nå følger en serie omforminger og bruk av integralsatser for å framskaffe energilikningen på den ønskede form. Vi starter med å multiplisere (21) med hastigheten og integrere resultatet over Ω. Videre benyttes Gauss sats og divergensfrihet for å frambringe likningen:

$$\int_{\Omega} (\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2)_t d\Omega = -\int_{r} (p + \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\Phi)\vec{v}\cdot\vec{n}ds \tag{28}$$

der r betegner den delen av randa som utgjør den fri overflaten og de vertikale snitt ved x_1 og x_2. $\vec{n}$ er utadrettet normalvektor og ds buelengde–differensialet. Vi benytter nå (20) for å skrive likningen om til en form som inneholder tidsendring av integrert kinetisk og potensiell energi i tyngdefeltet. Den kinematiske randbetingelsen (27) gir så at de fleste ledd i overflateintegralet kansellerer og vi ender opp med:

$$\frac{d}{dt}(e_p + e_k) = -\int_{x_1}^{x_2} p\vec{v}|_{z=\eta}\cdot\vec{n}ds + I_1 - I_2 \tag{29}$$

der

$$e_k = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 d\Omega \qquad e_p = \int_{\Omega} \rho\Phi d\Omega \tag{30}$$

og de to siste ledd er gitt ved

$$I_i = \int_{-H}^{\eta} \{(p + \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\Phi)u\}|_{x=x_i} dz \tag{31}$$

Benyttes nå (25) kan det første leddet på høyresiden i (29) skrives om [2]

$$-\int_{x_1}^{x_2} p\vec{v}\cdot\vec{n}ds = \int_{x_1}^{x_2} \sigma\vec{v}\cdot d\vec{s} = (\sigma\vec{v}\cdot\vec{s})|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \sigma\vec{s}\cdot d\vec{v} \tag{32}$$

det er lett å innse geometrisk at $\vec{s}\cdot d\vec{v}$ angir den relative individuelle forlengelsen av overflatesegmentet. For å bringe inn tidsendringen av den totale overflatelengden må vi korrigere for at integrasjonsgrensene ikke er individuelt faste. Betegnes den totale buelengde mellom x_1 og x_2 med L får vi:

$$\sigma\frac{dL}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \sigma\vec{s}\cdot d\vec{v} - (\sigma u(x,\eta,t)\frac{\partial s}{\partial x})|_{x_1}^{x_2} \tag{33}$$

[2] Et alternativ er å sette $ds = \sqrt{1+\eta_x^2}dx$, innføre p fra (26) og beskrive leddet med x som integrasjonsvariabel. For å forenkle regningene kan en stryke ledd av høyre orden og finne siste ledd i (38) og (41).

Når venstresiden tolkes som tidsendring av potensiell kappilar–energi, får det siste leddet betydning som fluks av slik energi. Innfører vi

$$e_p^{(k)} \equiv \sigma L \tag{34}$$

får vi nå en likning av formen (19) med energifluks gitt ved:

$$F = \int_{-H}^{\eta} \{(p + \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho\Phi)u\}dz + \sigma u|_{z=\eta}\frac{\partial s}{\partial x} - \sigma\vec{v}\cdot\vec{s} \tag{35}$$

Vi bemerker at de to siste ledd representerer hhv. transport av potensiell kappilar— energi med hastighetsfeltet og arbeid utført av overflatespenning i snittet. Disse tolkninger sammen med eksistensen av en energilikning som (19) rettferdiggjør definisjonen av $e_p^{(k)}$ gitt ved (34). Leseren bør tolke hvert enkelt av de øvrige ledd fysisk. Ved bruk av Eulers trykklikning kan F forenkles ytterligere:

$$F = -\int_{-H}^{\eta} (\phi_t - C(t))\phi_x dz + \sigma u|_{z=\eta}\frac{\partial s}{\partial x} - \sigma\vec{v}\cdot\vec{s} \tag{36}$$

2.4.6 Insetting av bølgeløsning

Så langt har utledning vært gjort uten bruk av den konkrete løsning for lineære overflatebølger. Når vi nå tilpasser utrykkene til laveste ordens bølgeteori starter vi med å bestemme konstanten $C(t)$. Sammenholdes Eulers trykklikning og dynamisk grenseflatebetingelse med likning (2-12) er det klart at løsningen (2-14) for ϕ tilsvarer $C(t) \equiv 0$. For $\vec{s}$ og s_x har vi

$$\vec{s} = \frac{\vec{\imath} + \eta_x\vec{k}}{(1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad s_x = (1+\eta_x^2)^{\frac{1}{2}} \tag{37}$$

Innføres dette hever de lineære deler av de to siste ledd i (36) hverandre. Beholdes så bare de kvadratiske ledd fåes samme form som tidligere:

$$F = -\int_{-H}^{0} \phi_t\phi_x dz - \sigma w|_{z=0}\eta_t \tag{38}$$

Vi lar $\hat{E}_p^t$, $\hat{E}_k$ og $\hat{E}_p^k$ betegne energiene assosiert med bølgebevegelsen. Disse framkommer ved å trekke likevektsenergiene fra hhv. e_p, e_k og $e_p^{(k)}$. Ved igjen å beholde ledd tom. kvadratisk orden i amplituden framkommer igjen uttrykkene:

$$\hat{E}_p^t = e_p - \int_{x_1}^{x_2}\int_{-H}^{0} \rho\Phi dz dx \approx \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}\rho\eta^2 dx \tag{39}$$

$$\hat{E}_k \approx \int_{x_1}^{x_2} \int_{-H}^{0} \frac{1}{2}\rho(\nabla\phi)^2 dz dx \tag{40}$$

$$\hat{E}_p^k = e_p^{(k)} - \sigma(x_2 - x_1) \approx \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2}\sigma\eta_x^2 dx \tag{41}$$

De midlede energitetthetene framkommer nå ved å sette $x_2 - x_1 = \lambda$ og dele "hatte"-størrelsene på λ.