5.3.1 Tillegg Me302: Utledning av skipsbølgemønster.

Kompendiets utledning av skipsbølgemønstret tar utgangspunkt direkte i fasefunksjonen og definisjon av bølgetall etc. Mye av regningene er derfor logisk sett identiske med de som i det generelle tilfellet førte fram til Hamiltons likninger. Vi vil her demonstrere hvordan Hamiltons likninger kan benyttes direkte. Utledningen erstatter regningen på side 106-109 i kompendiet.

Vi antar at en punktforstyrrelse som beveger seg i overflaten med hastighet: $-\vec{U}$=-$U\vec{\imath}$ genererer et stasjonært og langsomt varierende bølgetog. Dette kan behandles med bølgekinematikk som beskrevet i kap. 3 i kompendiet. Regnet i forhold til væsken har vi en isotrop dispersjonsrelasjon som gir en fasehastighet

$$\vec{c} = c_0(k)\frac{\vec{k}}{k} \tag{1}$$

der k er absoluttverdien av bølgetallsvektoren $\vec{k}$. Vi bytter nå koordinatsystem slik at forstyrrelsen blir liggende i ro. Vi får da frekvensen

$$\omega = c_0(k)k + \vec{U}\cdot\vec{k} \equiv W(k_x, k_y) \tag{2}$$

der k_x og k_y er komponentene av bølgetallsvektoren. W definert som ovenfor tilsvarer F i kompendiet. Vi merker oss at (2) gir *anisotrop* dispersjon pga. det siste leddet som ofte betegnes Doppler-skift. At bølgemønstret er stasjonært betyr i dette koordinatsystemet at $\omega = 0$. Dispersjonsrelasjonen (2) gir da umiddelbart en likning for k_x og k_y

$$W(k_x, k_y) = 0 \tag{3}$$

Gruppehasigheten er nå gitt ved

$$\vec{c}_g = \frac{\partial W}{\partial k_x}\vec{\imath} + \frac{\partial W}{\partial k_y}\vec{\jmath} \tag{4}$$

Da mediet er uniformt gir Hamiltons likninger[1]

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{c}_g \tag{5}$$

der

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{c}_g\cdot\nabla \tag{6}$$

Det følger umiddelbart at $\vec{k}$ og derved $\vec{c}_g$ er konstante langs karakteristikkene, slik at disse blir rette linjer. Bare de karakteristikker kan bære energi som går gjennom

[1] Selv om overflaten er stasjonær får vi karakteristikker parametrisert ved tiden fordi feks. *energien* forflytter seg i koordinatsystemet.

forstyrrelsen, som vi uten tap av generalitet kan plassere i origo. Hvert forhold y/x svarer derfor til en karakteristikk og overalt i mediet har vi likningen

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{\partial W}{\partial k_y}}{\frac{\partial W}{\partial k_x}} \tag{7}$$

som sammen med (3) implisitt definerer k_x og k_y som funksjon av x og y. For å finne eksplisitte uttrykk kan fortsette på ulike vis. En mulighet er å benytte (3) til å uttrykke komponentene av bølgetallsvektoren vha. c_0. Innsetting i (7) gir da en en bikvadratisk likning for c_0. En annen mulighet er å innføre vinkelen, θ, mellom $\vec{k}$ og den negative x-retningen. Vi kan da sette

$$k_x = -k\cos\theta, \quad k_y = k\sin\theta. \tag{8}$$

Fra (3) følger da umiddelbart

$$k = \frac{g}{U^2\cos^2\theta} \tag{9}$$

Vi merker oss at dette er en omskrivning av $U = c_0/\cos\theta$. Innsetting i (7) fulgt av eliminasjon av k gir da

$$\frac{y}{x} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin^2\theta} \equiv f(\theta) \tag{10}$$

Høyresiden, $f(\theta)$, har maksimum for $\sin\theta = \sqrt{1/3}$, dvs $\theta = \theta_c \approx 35.3°$. Dette svarer til $y/x = \sqrt{2}/4$ som er identisk med den ytterbegrensning av bølgemønstret som er funnet i kompendiet. For $y/x < \sqrt{2}/4$ finner vi to løsninger for θ, en som er mindre enn θ_c og en som er større. Disse to grenene definerer hver sin fasefunksjon og derved hvert sitt bølgefelt. Den første definerer de såkalte *hekkbølgene*, mens det andre gir *baugbølgene*. (10) kan lett omskrives til en bikvadratisk likning for $\sin\theta$

$$\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\sin^4\theta + \left(2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right)\sin^2\theta + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0, \tag{11}$$

som har 4 løsninger for $(y/x)^2 < 1/8$, tilsvarende de to bølgefeltene definert for posetive og negative y.

For fasefunksjonen kan vi sette opp integralet

$$\chi(\vec{r}) = \chi_0 + \int\limits_{C(\vec{r})} \vec{k}\cdot d\vec{r} \tag{12}$$

der χ_0 er fasen i origo og $C(\vec{r})$ betegner en hvilken som helst kurve som starter i origo og slutter i $\vec{r}$. I dette tilfellet får vi triviell regning dersom vi integrerer langs karakteristikkene

$$\chi(\vec{r}) = \chi_0 + k_x x + k_y y \tag{13}$$

der k_x og k_y jo er kjente som funksjoner av x og y. Hver verdi av χ definerer en faselinje. Vi utrykker bølgetallskomponentene vha. θ også i (13). Likningene (7)

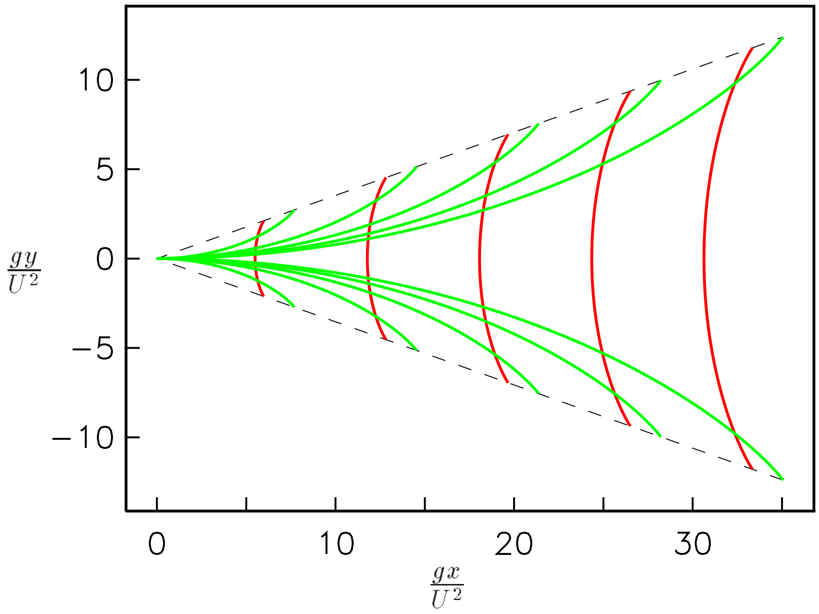

Figure 1: Fase-diagram for de to bølgesystemene bak en punktforstyrrelse på uendelig dyp. Vi har tegnet faselinjer som svarer til $\chi = -2n\pi$, $n = 1..5$.

og (13) kan så løses mhp. x og y og vi finner en parameterisering av faselinjene ($\chi = -A$=const.)

$$x = \frac{(A + \chi_0)U^2}{g} \cos\theta(1 + \sin^2\theta) \tag{14}$$

$$y = \frac{(A + \chi_0)U^2}{g} \cos^2\theta \sin\theta \tag{15}$$

For $|\theta| < \theta_c$ beskriver disse faselinjer for hekkbølger, mens de for $|\theta| > \theta_c$ gir faselinjer for baugbølger, eller divergerende bølger. Siden disse to feltene er uavhengig behøver de ikke ha samme χ_0. Stråleteorien bryter sammen i ytterkant av bølgemønstret, for $\theta \approx \pm\theta_c$.

Ved stråleteori får vi ikke bestemt fasen χ_0. For en punktforstyrrelse kan det vises, feks. ved bruk av stasjonær fase etter Fourier transform, at $\chi_0 = \frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi$ for hhv. hekk og baugbølger. (se feks. Newman: Marine Hydrodynamics) Disse verdiene er brukt i figure 1. I figur 2 har vi også tegnet inn den geometriske stedet som nåes ved gruppehastighet fra et valgt punkt slik det er brukt i betraktninger i kom/-pendiet. Figuren viser også "energitransportbanene" fram til krysningspunktene med faselinjer.

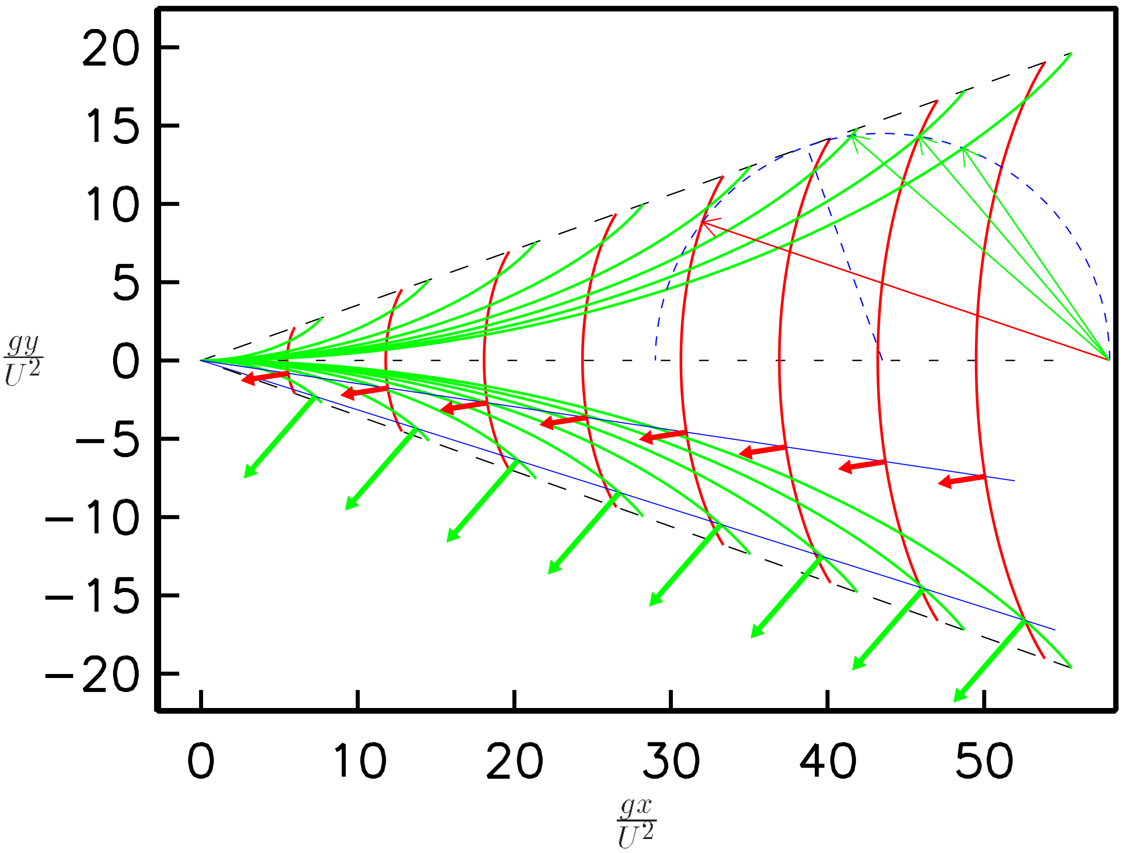

Figure 2: Fasediagram for Kelvin's skipsbølgemønster. Den stiplede halvsirkelen angir de geografiske steder dit gruppehastigheten bringer oss fra stedet der halvsirkelen krysser x-aksen til høyre, som forklart i kompendiet. Dette betyr at energien som forstyrrelsen tilførte det stasjonære bølgesystemet da den passerte dette punktet nå befinner langs den stiplede sirkelelen (og dens speilbilde under y-aksen). Pilene fra punktet og til bølgetoppenes skjæring med sirkelen svarer da til bølgebaner i det koordinatsystemet der forstyrrelsen beveger seg. Vi merker oss at bølgebanene er vinkelrette på kammene.
I det nedre halvplanet er to karakteristikker inntegnet. Langs den øverste (skalerte) bølgetallsvektorer tilhørende hekkbølger inntegnet, mens langs den nedre har vi tegnet inn bølgetallsvektorene for baugbølger.