8 Tillegg Me302: Om solitoner.

8.1 Innledning.

Enkle og idealiserte bølgeløsninger spiller en stor rolle i bølgeteori. Delevis skyldes dette at disse løsninger ofte kan sees som deler av mer komplekse bølgemønstre. En annen viktig grunn er at studiet av spesielle løsninger kan gi generell innsikt i oppførselen til bølger og de fysiske mekanismene som er involvert.

I litteraturen er bølger av *permanent form* viktige. Som navnet antyder er dette bølger som forplanter seg med uendret form og konstant hastighet. Naturligvis opptrer slike løsninger eksakt bare for uniforme medier, men ofte vil de også gi en god tilnærmelse når mediet varierer langsomt. Det enkleste, og viktigste, eksemplet på bølger av permanent form er den enkle harmoniske moden ("sinusbølge") som vi finner i lineær bølgeteori. Det finnes også en del ikke-lineære bølger av permanent form, bla.a.: Stokes-bølgen som er en generalisering av den harmoniske moden, sjokk av endelig utstrekning i diffusive media og solitære bølger som vi skal omtale her. Som navnet antyder består en solitær bølge av en enkelt bølgetopp. I streng forstand har den ikke endelig utstrekning, men styrken (avviket fra likevekt) forsvinner når vi fjerner oss fra toppen. Dersom solitærbølger oppfyller bestemte interaksjonsrelasjoner kalles de solitoner. Grovt sagt kreves et at de overlever kollisjoner uten tap av identitet eller samlet energi etc.

8.2 Historikk.

Solitære bølger ble, sammen med mange andre bølgefenomener, først beskrevet av J. Scott Russel i hans banebrytende arbeid "Report on Waves" som ble forfattet på oppdrag fra The Royal Society in London i 1842. Scott Russel var britisk vannveis-ingeniør og gjorde mange observervasjoner av bølger i kanaler, deriblandt av en enkelt (solitær) bølgetopp som forplantet seg over lange avstander uten merkbar formendring eller oppsplitting. Han klarte også å gjenskape en slik bølge i laboratoriet og målte dens hastighet til å være $\sqrt{g(h+A)}$ der g er tyngdens akselerasjon, h dypet ved likevekt og A amplituden.

Den første som ga en komplett teoretisk beskrivelse av solitærbølgen var J. Boussinesq i 1871 Det var i forbindelse med dette arbeidet han utledet den opprinnelige Boussinesq likningen. Senere har mer nøyaktige utrykk for solitærbølgen blitt funnet fra perturbasjonsutviklinger anvendt direkte på det fulle likningsettet for en ideell væske. En har også funnet helt andre typer av solitærbølger. De solitærbølger som er av samme natur som den lange overflatebølgen kalles i dag ofte for Boussinesq-soliton.

Forskning på solitærbølger kom svært i skuddet på 60-tallet. Basert på den enkle KdV likningen ble det utviklet en omfattende teori omkring disse bølgene. En fant forbløffende interaksjonsegenskaper mellom solitærbølger som er analoge til støt mellom partikler, noe som ga en forbindelse over til kvantefysikken. Ved den såkalte inverse spredningsteorien kunne man forutsi mye om hvordan solitoner kan utvikle seg fra initialbetingelser av generell form. Senere har man funnet en del andre spesielle fenomener der solitærbølger er, eller kan være, involvert. Disse skal vi la ligge og heller konsentrere oss om de sidene ved solitærbølgen som allerede er nevnt.

8.3 Solitærbølge-løsningen.

I dette tillegget velger vi konsekvent å benytte dypet som lengdeskala og lineær gruntvannshastighet som hastighetsskala. En tidsenhet er da tiden en bruker på å tilbakelegge ett dyp med lineær gruntvannshastighet. Et svært enkelt uttrykk for solitærbølgen kan finnes fra KdV likningen som i denne skaleringen kan skrives[1]:

$$\eta_t + (1 + \frac{3}{2}\eta)\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0 \tag{1}$$

Detaljene i regningen er gitt i kompendiet, og vi gjengir her bare resultatet:

$$\eta = \alpha \mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3\alpha}(x - ct)\right), \quad c = (1 + \frac{1}{2}\alpha) \tag{2}$$

der $\mathrm{sech} \equiv 1/\cosh$. En merker seg at forplantningshastigheten er noe større en lineær grunntvannshastighet og at skalaen for horisontal utstrekning er proposjonal med $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. Alternativt kan vi finne en tilsvarende tilnærmet løsning fra Boussinesq-likningen, eller ved å perturbere på Laplaces likning og randbetingelser. I det siste tilfellet vil utregningen implisitt inneholde en langbølgeutvikling. Både (2) og tilsvarende løsninger fra ulike andre KdV og Boussinesq-type inneholder relative feil av orden α i forhold til en mer nøyaktig løsning. Dette betyr at (2) er konsistent med målingene til Scott Russell. Mer generelt vil en solitærbølgeløsningen kunne skrives:

$$\eta = \alpha Y(\chi, \alpha) \qquad \overline{\phi} = B\Phi(\chi, \alpha) \tag{3}$$

der $\chi = k(x - ct) + \text{const.}$ og vi har rekkeutviklinger av formen:

$$\left.\begin{array}{rl} Y = & Y_0 + \gamma_1 \alpha Y_0^2 + ... \\ \Phi_\chi = & Y_0 + \kappa_1 \alpha Y_0^2 + ... \\ k = & \frac{\sqrt{3\alpha}}{2}(1 + k_1\alpha + ...\ ) \\ c = & h^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{2}\alpha + c_2\alpha^2 + ...) \\ B = & c\frac{\alpha}{k} \end{array}\right\} \tag{4}$$

der $Y_0 = \mathrm{sech}^2$ og koeffissientene bestemmes fra en perturbasjons-utvikling som likner Stokesbølge utviklingen i siste del av pensum. Vi skal ikke gå nærmere inn på dette her. Som rekkene i (4) står vil de i praksis bare kunne brukes for små α. Vha. ulike forbedringer har en beregnet sterkt ikkelineære løsninger og funnet at det eksisterer en maksimal amplitude svarende til $\alpha \approx 0.7$. For den ekstreme solitonen vil toppen danne en skarp spiss med en vinkel på 120° (se figur 2). Detaljer og historikk kan finnes i referansene [1], [3] og [2]

I figur 1 har vi tegnet en del solitærbølgeløsninger fra Boussinesq likningene. Vi merker oss at lengden avtar med høyden.

8.4 Kollisjonsegenskaper.

Det vakte stor oppsikt da man fant eksakte løsninger av KdV likningen som beskrev interaksjonen mellom to ulike solitærbølger. Vi henviser til [4] for en gjennomgang av teorien bak

[1]For numerisk løsning benytter vi faktisk formuleringen $\eta_t + (1 + \frac{3}{2}\eta)\eta_x - \frac{1}{6}\eta_{xxt} = 0$ (se skriv om KdV likninger). Vi lar også bølgene gå i negativ x-retning, men dette tilsvarer bare en triviell transformasjon.

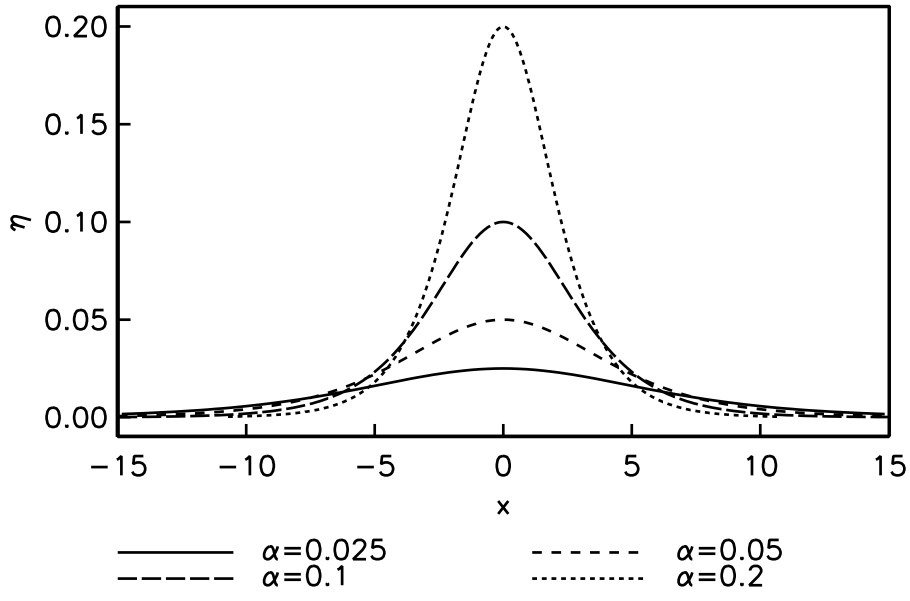


Figure 1: Soliton-profiler fra Boussinesq likningen

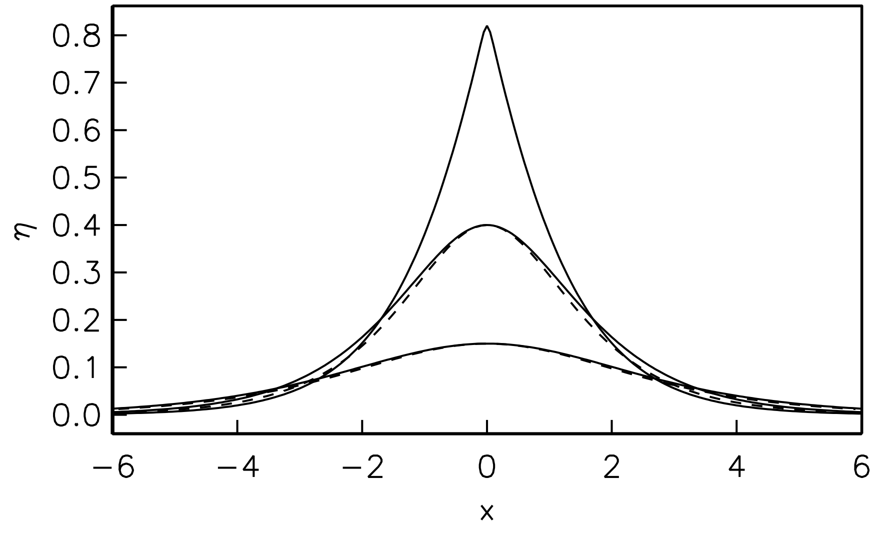


Figure 2: Solitoner fra Boussinesq likninger (stiplet) og full potensialteori (hel linje) for $\alpha = 0.15, 0.5$. Tilfellet $\alpha = 0.82$, som er nær det teoretiske maksimum, er også tatt med.

disse løsningene, men gir selve løsningen for to solitoner med samme forplantningsretning. Vi betegner amplitudene med α_1 og α_2 og definerer

$$f_i = e^{-\sqrt{3\alpha_i}(x-\hat{x}_i-(1+\frac{1}{2}\alpha_i)t)}$$

der $\hat{x}_i$, ved en gitt tid, definerer posisjonene til de to toppene. Lsningen er da gitt ved

$$\frac{\eta}{4} = \frac{\alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2 + 2(\alpha_1-\alpha_2)^2 f_1 f_2 + \left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2+\alpha_1}\right)^2 (\alpha_2^2 f_1^2 f_2 + \alpha_1^2 f_1 f_2^2)}{\left(1 + f_1 + f_2 + \left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2+\alpha_1}\right)^2 f_1 f_2\right)^2} \tag{5}$$

Dette uttrykket kan så diskuteres for ulike grensetilfeller med store og små f_1 og f_2 og gi de kvalitative egenskapene for interaksjon av solitoner. Vi vil i stedet vise noen numeriske resultater.

I figur 3(a) har vi framstilt hvordan en bølge med amplitude $\alpha = 0.2$ tar igjen og passerer en med amplitude $\alpha = 0.05$. Ved første øyekast kan det se ut som om de har passert hverandre uten noen virkning, men en nærmere undersøkelse viser at det inntrer faseskift (posisjonsendring) under interaksjonen. Et noe annet bilde får vi fra eksemplet i 3(b) der amplitudene, hhv. $\alpha = 0.2$ og $\alpha = 0.16$, har mindre forskjell. Vi observerer her hele tiden to topper. Når bølgene kommer i kontakt vil den første toppen vokse, mens den andre avtar, inntil de har byttet høyde. Deretter drar den første i fra igjen. Det som skjer er analogt med det rettlinjede støtet mellom to perfekt elastiske partikler med samme masse. Disse vil som kjent bytte momentum og energi. Det er denne egenskapen som har gitt opphav til betegnelsen *soliton*. I den senere tid har man funnet ut disse egenskapene ikke er eksakte for høyere ordens løsninger. Animasjoner av interaksjonsløsningene kan finne på `http://www.math.uio.no/~geirkp/me302/solito/index.html/`.

8.5 Spredning fra initiell forstyrrelse.

Tidligere har vi diskutert bølgespredning fra en konsentrert forstyrrelse på uendelig dyp under antagelse av lineære bølger. I dette avsnittet skal vi studere spredning fra en initiell overflatehevning på grunt vann innenfor rammen av langbølgeteori.

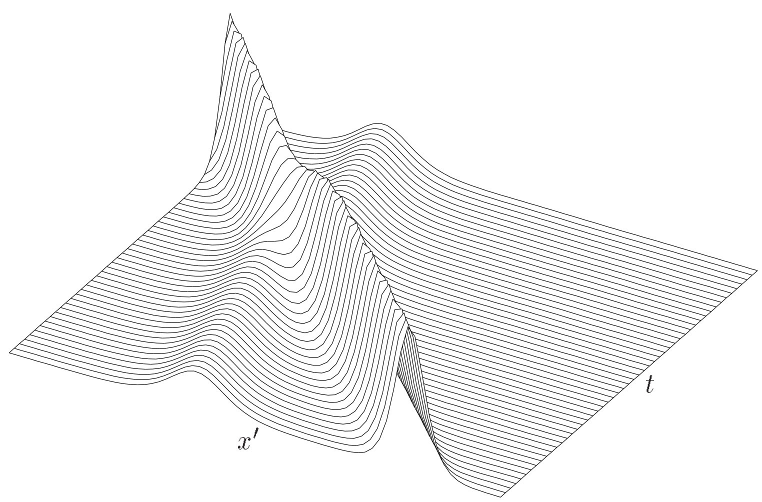
De hydrostatiske likningene kan behandles med karakteristikker slik det er beskrevet i kompendiet og gir alltid brytning.

Dersom vi lineariserer KdV eller Boussinesq likningene vil vi få et bølgesystem dominert av dispersjon. Bildet vil minne om det vi tidligere har funnet for tyngdebølger på dypt vann, bortsett fra at vi har en maksimal bølgehastighet. Som vist i figur 5(c) får vi da en første bølgetopp i en avstand $x_r \approx t$ (dit vi rekker å nå fram med lineær gruntvannshastighet) fra initialposisjonen. En skal også huske på at KdV-likningen forutsetter lange bølger og derved lite dispersjon. De korteste komponentene i et spekter, som etterhvert utgjør den bakre delen av bølgetoget, vil derfor ikke bli korrekt gjengitt.

For enkelte former på initialbetingelsen finnes det komplette analytiske løsninger av KdV likningen (invers spredningsteori). Disse skal vi ikke gå inn på men et hovedresultat er at en initiell hevning alltid vil frambringe minst 1 soliton og et sinusaktig (nesten periodisk) residualt bølgetog. Solitonene vil alltid ligge foran posisjonen x_r, som beskrevet ovenfor, mens bølgetoget derimot vil ligge etter denne. I figur 4 har vi framstilt utviklingen av to numeriske løsninger fra initialbtingelser av formen:

$$\eta(x,0) = \alpha \mathrm{sech}^2\left(\frac{4.15}{L}(x-x_0)\right) \tag{6}$$

(a): $\alpha = 0.05$ og $\alpha = 0.2$



(b): $\alpha = 0.15$ og $\alpha = 0.2$

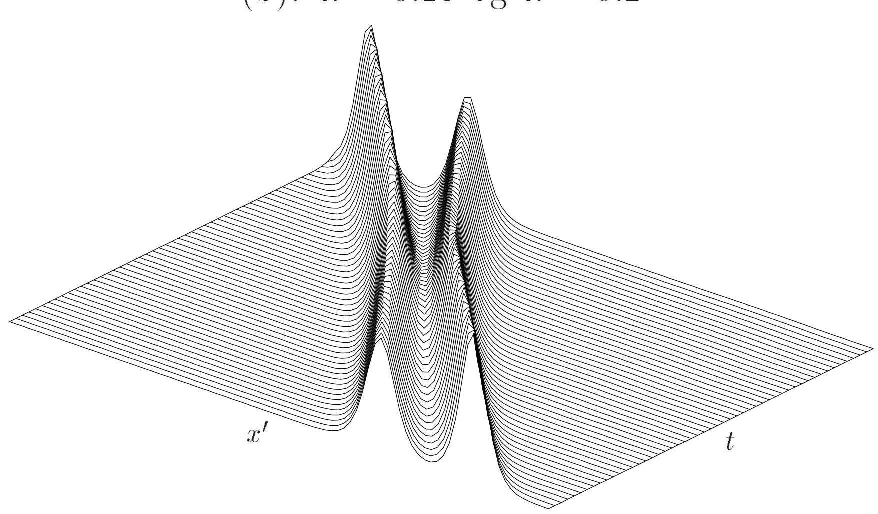


Figure 3: Soliton-interaksjoner framstilt i et koordinatsystem som beveger seg med lineær gruntvannshastighet. Bølgene forplanter seg i negativ x-retning, dvs. $x' = x + c_0 t$.

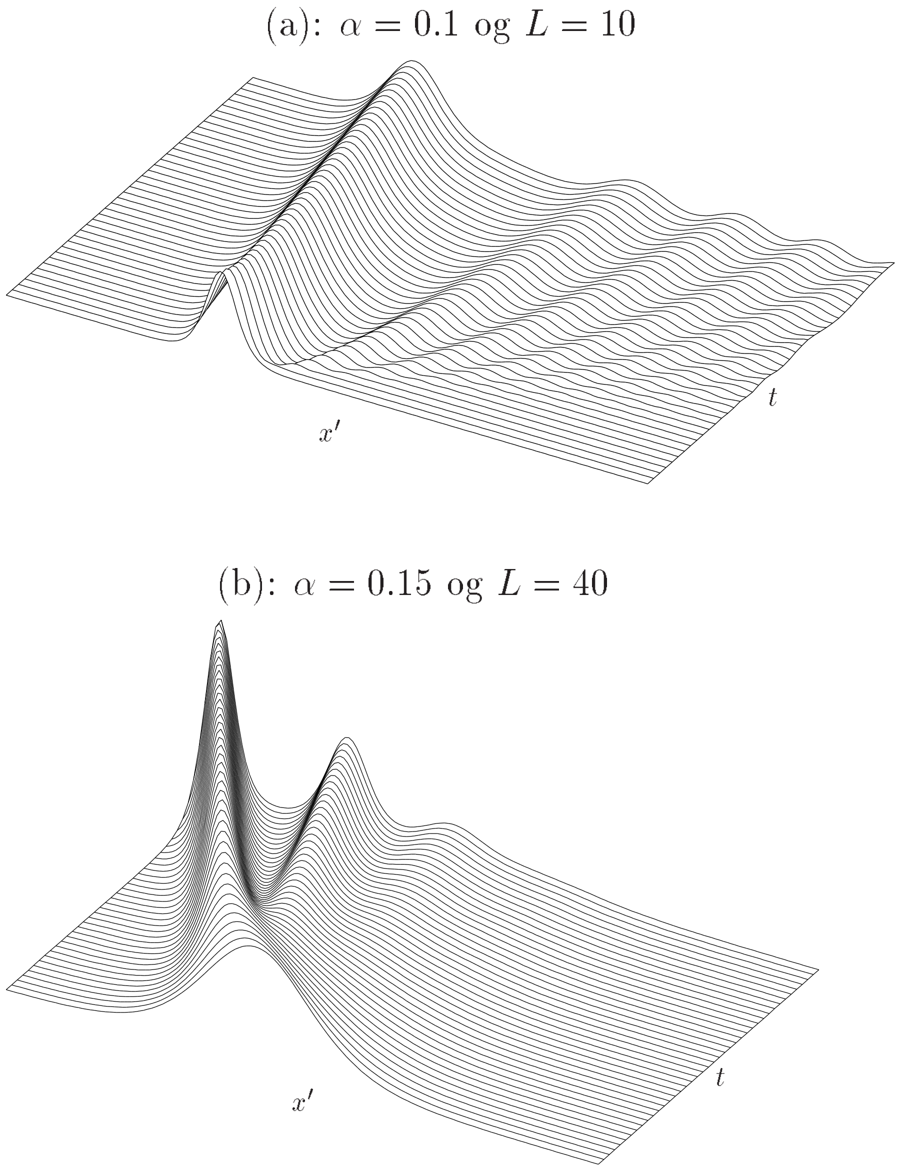


Figure 4: Utvikling fra konsentrert initialbetingelse framstilt i et koordinatsystem som beveger seg med lineær gruntvannshastighet. Bølgene forplanter seg i negativ x-retning, dvs. $x' = x + c_0 t$. Fra den lave, forholdsvis initialbetingelsen i (a), genereres bare 1 soliton, mens vi får 3 fra den langstrakte intielle forstyrrelsen i (b).

Vi merker oss at selv om fasongen ligner på en soliton har den generelt et annet forhold mellom høyde og lengde. I det ene tilfellet dannes 1 soliton, i det andre, som svarer til en lengre initialbetingelse, hele 3 solitoner. Igjen er animasjoner tigjengelige på `http://www.math.uio.no/~geirkp/me302/solito/index.html/`.

Fordi alle initielle hevninger gir opphav til minst en soliton er de er enkle å generere i et laboratorium. Beveges feks. et stempel inn i den ene enden av en bølgetank vil en ren soliton alltid skille seg ut i forkant av bølgesystemet bare tanken er lang nok.

Til slutt oppsummerer vi virkningene av ikkelinearitet og dispersjon, alene og kombinert, i figur 5.

References

[1] The second approximation to cnoidal and solitary waves. *J. Fluid Mech.*, 9:430–444, 1960.

[2] Witting J. On the highest and other solitary waves. *SIAM J. Appl. Math.*, 28:700–719, 1975.

[3] Longuet-Higgins M. S. and Fenton J. D. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave i. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 340:471–493, 1974.

[4] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Pure & Applied Mathematics. John Wiley & sons, 1974.

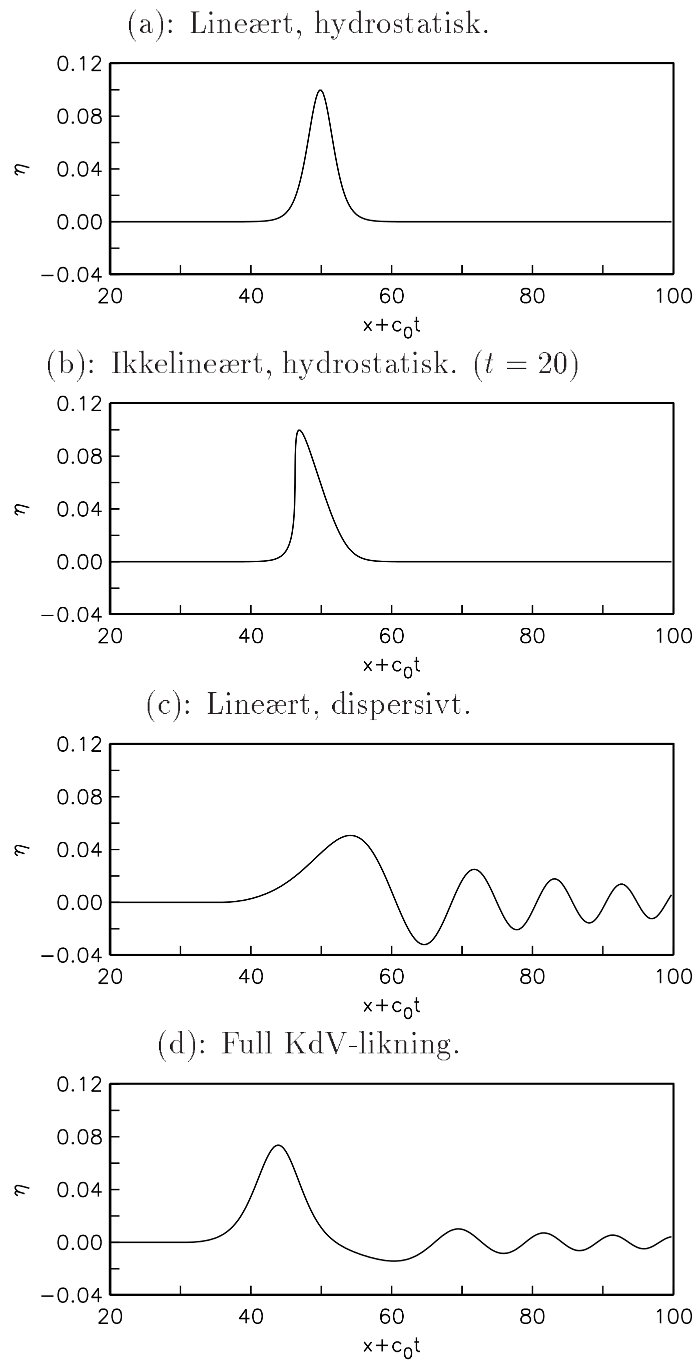


Figure 5: Utvikling fra konsentrert initialbetingelse beregnet fra ulike tilnærmelser for parametervalg $\alpha = 0.1$, $L = 10$. Løsningene er igjen framstilt i et koordinatsystem som beveger seg i negativ x retning med gruntvannshastighet. Opprinnelig er toppen av bølgen ved $x' = x + c_0 t = 50$. Bortsett fra i (b) er tiden lik 200 enheter, dvs. at en ville forflyttet seg 200 dyp med lineær gruntvannshastighet.