3.4 Tillegg: WKBJ metoden.

3.4.1 Utledning av WKBJ tilnærmelsen.

WKB(J) metoden kan formuleres ved flere formelle rekkeutviklinger. Målsettingen med dette tillegget er å gi en motivasjon for hvordan de ulike ordner av tilnærmeleser følger fra de grunnleggende antagelser. Vi tar utgangspunkt i den lineære langbølgelikningen

$$\eta_{tt} - \nabla \cdot (c_0^2 \nabla \eta) = 0 \tag{1}$$

der $c_0^2 = gh(x,y)$ og h som vanlig betegner dypet. Vi antar periodisk bevegelse og separerer ut tiden ved å sette

$$\eta(x,y,t) = \hat{\eta}(x,y)e^{i\omega t} \tag{2}$$

inn i (1). Dette gir:

$$\nabla \cdot (c_0^2 \nabla \hat{\eta}) + \omega^2 \hat{\eta} = 0 \tag{3}$$

I bølgekinematikk forutsettes at *h varierer lite over en bølgelengde* slik at løsningen kan skrives:

$$\hat{\eta} = A(x,y)e^{i\sigma(x,y)} \tag{4}$$

der bølgetallet kan defineres ved $\vec{k} = \nabla\sigma$ og A og $\vec{k}$ *varierer langsomt*[1]. Dispersjonsrelasjonen gir så:

$$\omega = c_0 k \equiv c_0 |\vec{k}| = c_0 |\nabla \sigma| \tag{5}$$

Vi ønsker å komme et skritt videre og setter en løsning på formen (4), med en σ som oppfyller relasjonen (5), inn i (3).Forkortning av eksponensiell faktor og en enkel ordning av leddene gir:

$$\nabla \cdot (c_0^2 \nabla A) + i\{\nabla \cdot (c_0^2 A \vec{k}) + c_0^2 \vec{k} \cdot \nabla A\} + (\omega^2 - c_0^2 k^2)A = 0 \tag{6}$$

Det siste leddet, som er det eneste som ikke inneholder derivasjoner mhp. langsomtvarierende størrelser, forsvinner pga. definisjon av k. Derved har vi ved skrivemåten (4) utledet en likning som bare uttaler seg om langsom variasjon av amplitude–faktoren A og bølgetall. En omskrivning av likningen ovenfor gir:

$$\nabla \cdot (c_0^2 \nabla A) + \frac{i}{A} \nabla \cdot (c_0^2 A^2 \vec{k}) = 0 \tag{7}$$

Så langt har vi faktisk ikke gjort noen tilnærmelser. Vi vil alltid kunne skrive løsningen på formen (4) og utlede (7). Antagelsen om langsom variasjon trenger vi for å begrunne de tilnærmelsene som følger. Før vi fortsetter er det verdt å bemerke at en likning som (7) *kan* være fordelaktig for numerisk løsning framfor (3), fordi vi kan nøye oss med en grovere oppløsning i en element- eller differensmetode.

[1] Vi har konstant frekvens og tiden er allerede separert ut.

Størrelsen på det andre leddet i (7) vil typisk være $c_0^2\nabla A/\lambda$ fordi $k \equiv 2\pi/\lambda$. Liten variasjon over en bølgelengde betyr bla.a. at

$$\nabla \cdot (c_0^2 \nabla A)\lambda \ll c_0^2 \nabla A \tag{8}$$

Dette sammenholdt med observasjonen ovenfor gir at andre ledd i (7) dominerer, og vi kan tilnærmet sette:

$$\nabla \cdot (c_0^2 A^2 \vec{k}) = 0 \tag{9}$$

som er transportlikningen gitt i kompendiet med P_0 omdøpt til A. En kunne også begrunnet (9) ganske enkelt ved at det første leddet i (7) inneholder en derivasjon mer av langsomt varierende størrelser. Ønsker vi å gå videre kan vi definere $\vec{k} \equiv \omega\vec{\kappa}$ slik at $\kappa \equiv |\vec{\kappa}| = 1/c_0$ og skrive (7) på formen:

$$\nabla \cdot (c_0^2 A^2 \vec{\kappa}) = \frac{iA}{\omega} \nabla \cdot (c_0^2 \nabla A) \tag{10}$$

En pertubasjonsrekke kan nå skrives:

$$A = P_0 + \frac{i}{\omega} P_1 + \left(\frac{i}{\omega}\right)^2 P_2 + ... \tag{11}$$

der ω fungerer som formell ordningsparameter slik at leddene bestemmes fortløpende fra:

$$\nabla \cdot (c_0^2 P_0^2 \vec{k}) = 0 \tag{12}$$

$$\nabla \cdot (c_0^2 P_0 P_1 \vec{k}) = \frac{1}{2} P_0 \nabla (c_0^2 \nabla P_0) \tag{13}$$

$$... \tag{14}$$

$$... \tag{15}$$

I en slik perturbasjonsutvikling bør likningene gjøres dimensjonsløse ved å innføre en karakteristisk lengde for dybdevariasjoner slik at ordningsparameteren blir en liten dimensjonsløs størrelse. Vi kan sette opp en skalering

$$h = h_0 H, \quad x = Lx', \quad y = Ly', \quad \hat{\eta} = h_0 \tilde{\eta} \tag{16}$$

der L er definert slik at $|\nabla' h| = O(1)$ og bringe (3) på formen

$$\epsilon^2 \nabla' \cdot (H \nabla' \tilde{\eta}) + \tilde{\eta} = 0 \tag{17}$$

der

$$\epsilon^2 = \frac{g h_0}{\omega^2 L^2} \tag{18}$$

Dersom vi definerer et referansebølgetall ved $k_0 = \omega/\sqrt{g h_0}$ kan vi skrive om denne til $\epsilon = \lambda_0/(L2\pi)$. En liten ϵ uttrykker altså at dypet endrer seg lite over en bølgelengde. Vi merker oss at (17) degenererer for $\epsilon \to 0^+$, noe som innebærer at vi har et singulært perturbasjonsproblem. Også (4) må omformuleres litt. Siden L er mye større en bølgelengden følger at vi har et stort antall blgetopper innenfor en gitt geometri. Da blir også fasefunksjonen stor. En løsning kan derfor skrives som

$$\tilde{\eta} = A(x', y')e^{i\epsilon^{-1}\sigma'(x', y')} \tag{19}$$

der A etc. nå har deriverte av orden 1. Innsetting i (17) gir nå

$$\epsilon^2\nabla' \cdot (H\nabla' A) + i\epsilon\{\nabla' \cdot (HA\vec{K}) + H\vec{K} \cdot \nabla' A\} + (1 - HK^2)A = 0 \tag{20}$$

der $\vec{K} = \nabla'\sigma'$. En innsetting av en rekke $A = A_0 + \epsilon A_1 ...$ gjenskaper nå perturbasjonsrekken ovenfor.

3.4.2 Sammenlikning med eksakt løsning.

Med eksakt løsning mener vi her en løsning av den linære gruntvannslikningen (3). Enklest blir det om vi antar plane bølger i en plan geometri, dvs. $h = h(x)$ og $\vec{k} = k(x)\vec{\imath}$. I dette tilfellet lar (9) seg integrere og vi får *Greens'* lov:

$$A = A_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-\frac{1}{4}}, \tag{21}$$

der A_0 og h_0 beskriver en referansetilstand, feks. er de verdiene av A og h for en bestemt x. Vi skal nå sammenlikne (21) med en nøyaktig numerisk løsning av (3).

Vi anvender en enkel test geometri, bestående av en flat bunn, $h = h_l = 1$, for $0 < x < x_l$, en helning for $x_l < x < x_r$ og en hylle med konstant dyp h_r for $x_r < x$. Over skråningen er h definert ved:

$$h = h_l + (h_r - h_l)\sin\left(\frac{\pi(x - x_l)}{2(x_r - x_l)}\right) \tag{22}$$

Vi merker oss at h er kontinuerlig deriverbar overalt. I det dype området spesifiserer vi en innkommende periodisk bølge med amplitude 1 og frekvens ω. Dette gjøres med en kombinert input/strålingsbetingelse som vi ikke trenger å diskutere i deltalj utover å bemerke at den er eksakt. Ved enden av hyllen legges tilsvarende på en ren strålingsbetingelse. I den numeriske løsningen defineres A som den maksimale η i hvert punkt. En definisjons-skisse av geometri og bølgefelt er vist i figur 1.

Resultater for en slak og en bratt helning er vist i figur 2. For den lange helningen er overenstemmelsen nærmest perfekt. Også for den korte helningen observerer vi god overenstemmelse, noe som er bemerkelseverdig siden $x_r - x_l$ her er sammenliknbar med λ på dypet. Avviket er størst for $x < x_l$ og har tydelig preg av at en reflektert bølge er overlagret den inkommende. I det aktuelle tilfellet har den reflekterte bølgen en amplitude som er 0.04 av den inkommende.

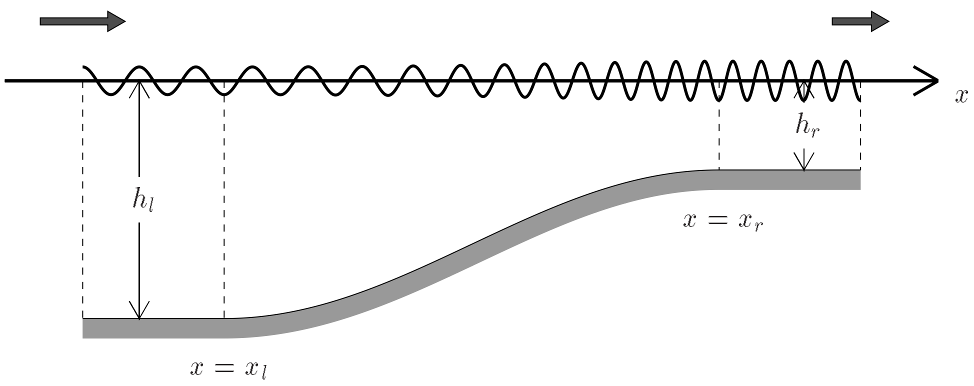

Figure 1: Definisjonsskisse av geometri og bølgefelt. Dyp og overflatehevning er ikke framstilt i korrekt innbyrdes skala.

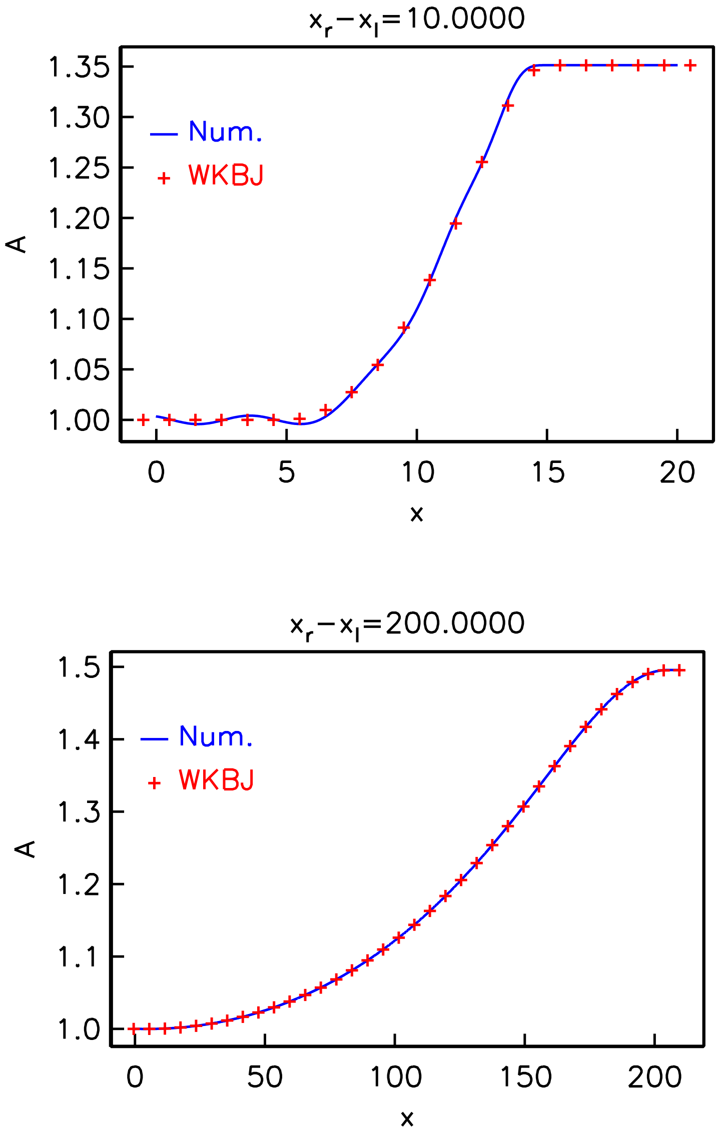

Figure 2: Amplifikasjon av periodiske bølger på en skråning. Skråningen starter ved $x_l = 5$ og inkommende bølge har amplitude 1 and periode $2\pi/\omega = 8$. Øverst: $h_r = 0.2$, $x_r - x_l = 200$; Nederst: $h_r = 0.3$, $x_r - x_l = 10$. De heltrukne linjene er de numeriske løsningene, mens '+' merkene viser Greens' lov (WKBJ) løningen.